

第1章 コマの章動のメカニズムと単振動近似

東亜天文学会 江頭 務

はじめに

コマの章動とは、コマの回転のふらつきである。

章動についてはオイラーの運動方程式で解明されているが、初学者には今一つ章動の全体像が見えづらいのが実情であろう。

そこで本稿では、安定度 $S=L_3^2/mgrI$ (無次元数) をただ一つのパラメータとして章動の全体像が理解できるように構成したものである。

章動を単振動にて近似した簡易式があるが、それはコマの回転数が高速であることを前提としたものである。しかしながらコマの回転数が高速の時は章動の変動幅自体も微小となるため、章動が大きな領域では適さないものとなっている。

そこで、本稿では章動のメカニズムを図式的に説明した上で、章動が大きな領域での精密な単振動近似式を導出するものである。コマの運動はオイラー角 θ (章動)、 ϕ (歳差)、 φ (コマの回転) で表されるが、 ϕ 、 φ は θ の関数である。

そのため本式により θ と時間の関係が明らかになれば、ルンゲクッタ法などを使うことなく高校物理の範疇で容易に ϕ と φ の時間的変化を導くことができる。

計算はエクセルで実施した。グラフはわかりやすくするため角度に度を採用しているが、角度の計算はすべてラジアンである。

本稿は『理科教材で学ぶコマの運動』の一部で、説明で引用する考え方や諸式はすべて下記のサイトにまとめて掲載しています。

コマのワンダーランド 理科教材で学ぶコマの運動<歳差・章動・極運動>

<https://yamauo1945.sakura.ne.jp/astronomy.html>

尚、本稿で検証用に使用したコマのシミュレーションプログラムは第3章で作成したものである。

1 コマの回転運動における基本諸式

最初に、検討の出発点となるコマの回転運動の良く知られた諸式を紹介しておく。
詳細については末尾の参考文献を参照願いたい。

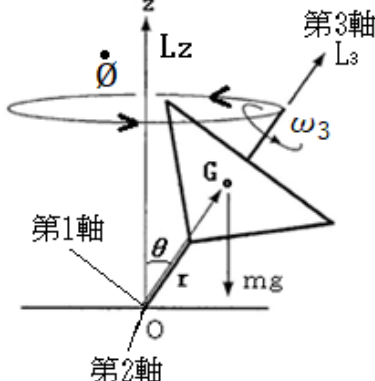
	L_z : 鉛直軸の角運動量 第3軸: コマの慣性主軸 コマの軸と同じ 第1軸、第2軸: 第3軸に直交する 慣性主軸 L_3 : コマの軸の角運動量 ω_3 : 第3軸の角速度	$\dot{\theta}$: 歳差運動の角速度 θ : コマの軸の傾斜角 g : 重力加速度 m : コマの質量 G : コマの重心 r : 位置ベクトル O : コマの支点 (原点)
---	--	---

図 1.1 コマの説明図

一般に、固定点を持つ剛体の運動は剛体に固定された3本の慣性主軸で記述される。
この慣性主軸を第1軸、第2軸、第3軸として、図 1.1 の L_3 で表示されたコマの回転軸を第3軸に設定する。図 1.1 のコマのような回転体の場合には、慣性モーメント I が第2軸、第3軸の取り方とは無関係に常に等しいのでこれらの軸を任意に選ぶことができる。
そのため、図 1.2 のように原点 O を通り第3軸に直交する第1軸、第2軸がなす平面と、 z 軸と第3軸がなす平面が直交するところに r 軸を置くことができる。
そして、 r 軸に直交する s 軸を設定し第3軸、 r 軸、 s 軸を新たな回転座標系とする。
この回転座標系はコマの回転軸の位置をオイラーの角 θ と ϕ のみで表したものである。

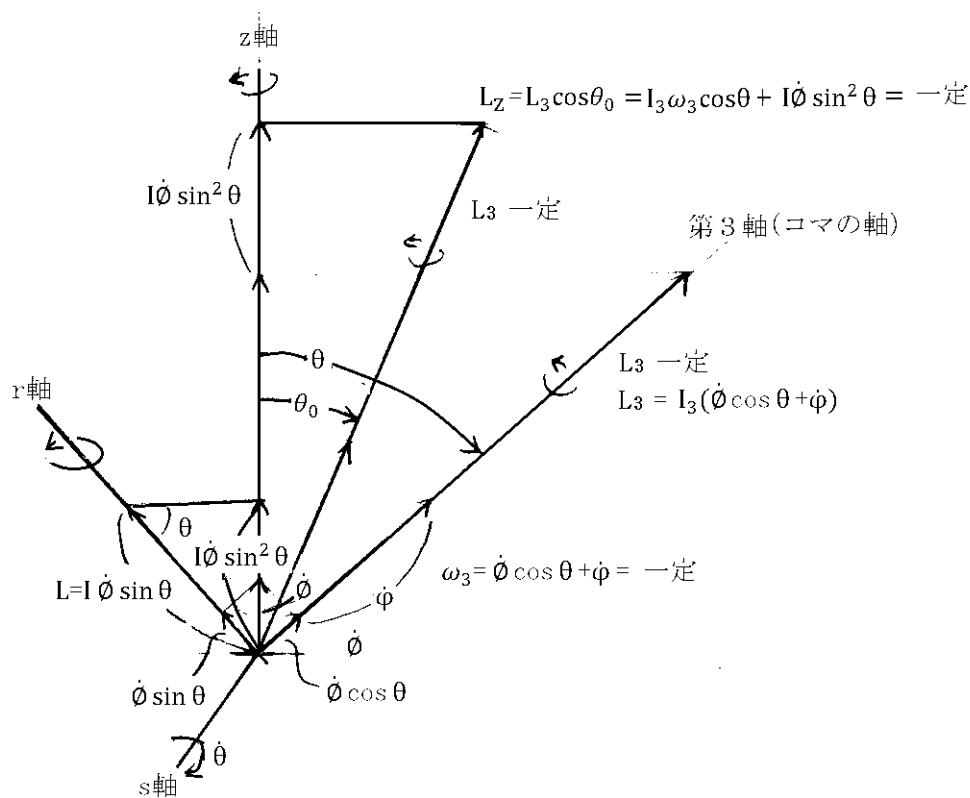


図 1.2 オイラーの角 θ と θ_0 で表現されたコマの運動

θ_0 : 初期条件におけるコマの軸の傾斜角(投入角) ϕ : コマの回転の角速度
 L_z : z 軸の角運動量 $\dot{\theta}$: s 軸におけるコマの傾斜角の角速度 (章動)
 I_3 : 第 3 軸(コマの軸)の主慣性モーメント I : r 軸 (=第 1、2 軸) の主慣性モーメント
 L : r 軸の主慣性モーメント

図 1.2 から以下の諸式が容易に導き出される。

この図において留意すべきポイントを下記に挙げる。

- ・力のモーメント N は z 軸、第 3 軸に直交する。
 このため、z 軸、第 3 軸の角運動量 L_z と L_3 は保存される。
- ・ $\dot{\theta}$: 歳差運動の角速度は第 3 軸と r 軸の成分に分解される。
- ・コマの回転軸の角速度 ω_3 は自転の角速度 ϕ のみでなく、z 軸の角速度 $\dot{\theta}$ の成分が付加される。角速度 ω_3 は $L_3 = I_3 \omega_3$ が保存されることから、 ω_3 も保存される。

(1) エネルギーの保存則 E は一定

コマは回転と位置のエネルギーを持ち、全エネルギー E は保存される。

$$E = \frac{1}{2} I (\dot{\theta} \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + mgr \cos \theta = \text{一定} \quad (1.1) \text{式}$$

(2) 角運動量の保存則 L_3 と L_z は一定

① $L_3 = \text{一定}$

$$L_3 = I_3 \omega_3 = I_3 (\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi}) = \text{一定} \quad (1.2) \text{式}$$

$$\omega_3 = \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} = \text{一定} \quad (1.3) \text{式}$$

② $L_z = \text{一定}$

$\theta_0 = \theta$ でコマを静かに手放すことを想定すると

$$L_z = L_3 \cos \theta_0 = I_3 \omega_3 \cos \theta_0 = I_3 \omega_3 \cos \theta + I \dot{\theta} \sin^2 \theta = \text{一定} \quad (1.4) \text{式}$$

2 従来の近似式

まず目的とする近似式を導出するための準備として、従来の近似式を紹介する。

末尾の参考文献には、章動に関する下記の近似式(1.5)式が掲載されている。

導出過程は長くなるためここでは割愛するが、興味のある方は末尾の参考文献を参照願いたい。

$$\text{従来の近似式 } \dot{\theta} = \frac{mgr}{L_3} \sin \theta_0 \sin \frac{L_3}{I} t \quad (1.5) \text{式}$$

ここで $\dot{\theta}$ を積分して、 $t=0$ の時の初期値を θ_0 とすると

$$\theta = \frac{mgrI}{L_3^2} \sin \theta_0 \left(1 - \cos \frac{L_3}{I} t\right) + \theta_0 \quad (1.6) \text{式が導かれる。}$$

これは $t=0$ において $\dot{\theta}=0$, $\dot{\phi}=0$ の初期条件もち、高速で回転するコマをある角 θ_0 で静かに手放すことを対象としたものであり、

$$\text{エネルギーは } E = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + mgr \cos \theta_0 = \text{一定} \quad (1.7) \text{式 で表される。}$$

尚、 $\theta_0=0$ の時はコマにかかる重力モーメントがないので、歳差運動も章動も発生しないのでここでは除外される。

$mgrI \sin \theta_0 / L_3^2$ が振幅、 L_3/I が固有角振動数である。

上式は、 θ_0 と θ の差が微小、つまり章動自体が微小であることを前提にした近似を行っているため、差が比較的大きな計算ケースでは誤差が大きくなる。

本稿はこれを改善することをひとつの目的として新たな近似式の導出を行う。

ここではその目標となる近似式を、振幅 A 、を角振動数 ω として次のように設定しておく。

$$\theta = A(1 - \cos \omega t) + \theta_0 \quad (1.8) \text{式}$$

3 章動の変動幅と安定度

章動の変動幅は解析的に求められるので、近似ではなく理論値である。

まず歳差運動の角速度 $\dot{\theta}$ を(1.14)式より求める。 $\dot{\theta} = \frac{L_3}{I \sin^2 \theta} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$ (1.9)式

次に前述のエネルギー保存の(1.1)式に、(1.7)式と(1.9)式を代入する。

これらから章動の回転エネルギー $\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$ が次のように得られる。

$$\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} I (\cos \theta_0 - \cos \theta) \left(\frac{2mgr}{I} - \frac{L_3^2}{I^2 \sin^2 \theta} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \right) \quad (1.10)式$$

ここで章動の変動幅を $\theta_0 \sim \theta_e$ としよう。

つまり、コマは初期状態の θ_0 から重力モーメントにより θ_e まで下降した後、折り返して θ_0 の位置まで戻る。この繰り返しが章動である。

折り返し点では、 $\dot{\theta}$ がゼロとなるため、(1.10)式の右辺の根が変動幅となる。

ひとつは θ_0 であり、もうひとつの θ_e は $\frac{2mgr}{I} - \frac{L_3^2}{I^2 \sin^2 \theta} (\cos \theta_0 - \cos \theta) = 0$ (1.11)式を解けばよい。

参考文献に従って、 $u = \cos \theta$ $u_0 = \cos \theta_0$ と置いて(1.11)式を変形すると

$2mgrI(1-u^2) + L_3^2(u-u_0) = 0$ となり、 u を変数とする 2 次曲線の式と直線の式に分離される。2 次曲線は上を凸として ± 1 の二つの根を持ち、直線は $-1 \leq u_0 \leq 1$ の間にある u_0 を通り正の傾きを持つ。このため、2 次曲線は u_0 の+側では引き上げられ、-側では引き下げられる。つまりこの合成から、 u は $-1 \leq u \leq u_0$ に一つの根を持つことがわかる。

最終的に θ_e は下式で表される。

$$\cos \theta_e = \frac{S}{4} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{16}{S^2} - \frac{8 \cos \theta_0}{S}} \right) \quad S = L_3^2 / mgrI \quad (1.12)式$$

ここで $S = L_3^2 / mgrI$ は無次元数で、コマが安定して回転する条件を表す指標となるものである。本稿では以後これをコマの安定度と呼ぶこととする。

ここで、安定度 S について検討しよう。

話は前後するが、後述するようにコマがふらつかずに安定して回転している状態を定常歳差運動という。

定常歳差運動は章動を伴わないことから $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ であり、後述の(1.22)式から

$$I \dot{\theta}^2 \cos \theta - L_3 \dot{\theta} + mgr = 0 \quad (1.13)式となる。$$

上式を $\dot{\theta}$ について解くと、歳差運動の角速度 $\dot{\theta}_0$ はコマの傾斜角を θ_0 として

$$\dot{\theta}_0 = L_3 \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4mgrI \cos \theta_0 / L_3^2}}{2I \cos \theta_0} = L_3 \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cos \theta_0 / S}}{2I \cos \theta_0} \quad (2.5)式となる。$$

(詳細 2 章「章動の一般化」参照)

ここで $\dot{\theta}_1$ は実数解である必要から上式の $\sqrt{\quad}$ の中は、 $1 - 4 \cos\theta_0/S \geq 0$ となり $S \geq 4 \cos\theta_0$ となる。 $\cos\theta_0$ の最大値は1であるから、 $S \geq 4$ であれば初期値の θ_0 とは無関係に定常歳差運動の必要条件が得られる。判別式を満たすだけでは定常歳差運動の必要条件であって十分条件ではない。

$S \geq 4$ はコマがコマの運動をするための最低限の条件を示すものである。

そのため本稿では基本的に $S \geq 4$ のコマを対象とする。

参考文献 p434(17.78)式によればコマの定常歳差運動の必要条件は、 $L_3^2 \geq 4mgrl \cos\theta_0$ で、上述の $S \geq 4$ と一致する、

θ_0 の時の $\dot{\theta}$ は初期条件から当然 $\dot{\theta} = 0$ であるが、 θ_e の時の $\dot{\theta}$ は(1.9)式と(1.11)式の

関係から $\dot{\theta} = \frac{2mgr}{L_3}$ (1.14)式となる。

変動幅 D は $D = \theta_e - \theta_0$ (1.15)式で、振幅 A は $A = D/2 = (\theta_e - \theta_0)/2$ (1.16)式、

振動の中央値 θ_c は $\theta_c = \theta_0 + A$ (1.17)式である。

章動の変動幅は(1.12)式からわかるように、 $S = L_3^2 / mgrl$ に依存している。

そこで S をパラメータとして変動幅 $D = \theta_e - \theta_0$ を求めたのが図 1.3 である。

章動の変動幅

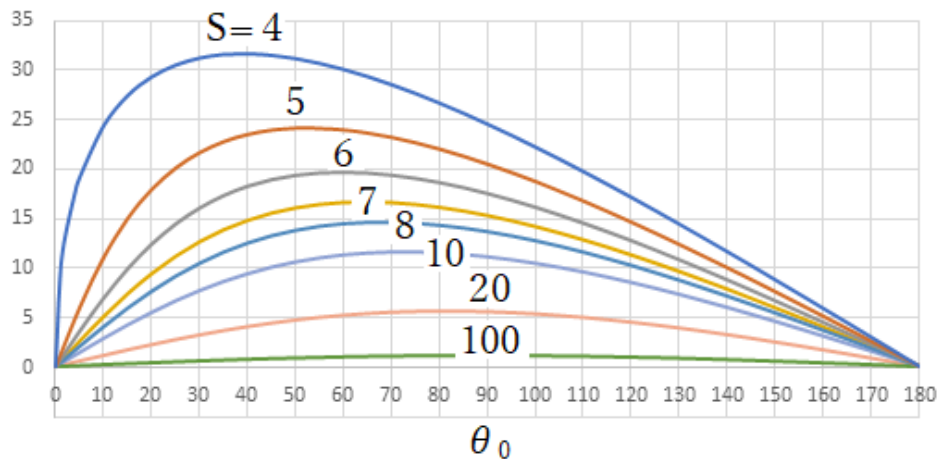


図 1.3 θ_0 を変化させた時の章動の変動幅 ($D = \theta_e - \theta_0$) 安定度 $S = L_3^2 / mgrI$
上から $S = 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 10 \quad 20 \quad 100$

章動の変動幅の最大値は S の値によって異なった様相を呈している。

$S=4$ のコマの高速回転の下限においては、 $\theta_0=39^\circ$ あたりがピークとなった。

尚、章動の最大変動幅を示す現象については後ほど詳述する。

その後 S の増大とともにピークは右に移動し、 $\theta_0=90^\circ$ にて収束する結果となった。

変動幅の値は S の増大と共に減少するが、その程度は初期においては大きく最終的には 0 に収束する。

ここで(1.6)式の振幅 $mgrI \sin \theta_0 / L_3^2$ を眺めてほしい。 $mgrI / L_3^2 = 1/S$ を定数と見れば振幅は $\sin \theta_0$ に依存することになる。それが図 1.3 の安定度 $S > 20$ の分布に対応していることがわかる。この時の章動の最大変動幅は 6° 程度で、(1.6)式は安定度 $S > 20$ のコマの高速回転を前提とした近似式であることがわかる。

ところで高速回転と言ってもその概念は曖昧である。

何回転以上が高速なのか決められないからである。

$L_3 = I_3 \omega_3$ でコマの回転数を n とすると、 L_3 は $L_3 = 2\pi n I_3$ (1.18)式となる。

つまり I_3 の大きなコマがゆっくり回ると、 I_3 の小さなコマが早く回ると章動に与える効果は同じである。

このため、本稿ではコマの回転速度にかえて安定度 S を分類の基準として用いることにする。

4 章動のメカニズム

前述の単振動の運動方程式 $\theta = A(1 - \cos \omega t) + \theta_0$ (1.8) 式を t で 2 階微分して、(1.17) 式の

$A = \theta_c - \theta_0$ を代入すれば、角加速度 $\ddot{\theta}$ は $\ddot{\theta} = -\omega^2(\theta - \theta_c)$ (1.19) 式で表される。

従って、章動と単振動の近似は θ と $\ddot{\theta}$ の関係から導かれる。

$\ddot{\theta}$ はどのようにしても求まるが、下記の手順が簡明である。

エネルギー保存の(1.1) 式を t で微分すると

$$\frac{dE}{dt} = I\dot{\theta}\ddot{\theta} + (I\dot{\phi}\ddot{\phi}\sin\theta + I\dot{\phi}^2\dot{\theta}\cos\theta - mgr\dot{\theta})\sin\theta = 0 \quad (1.20) \text{ 式}$$

次に、角運動量の z 軸成分である(1.4) 式を t で微分すると

$$\frac{dL_z}{dt} = (I\ddot{\phi}\sin\theta + 2I\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta - L_3\dot{\theta})\sin\theta = 0 \quad (1.21) \text{ 式}$$

ここで(1.20) 式－(1.21) 式 $\times \dot{\phi}$ を求め、 $\dot{\theta}$ で約分して整理すると

$$I\ddot{\theta} = mgr\sin\theta - (L_3\dot{\phi} - I\dot{\phi}^2\cos\theta)\sin\theta \quad (1.22) \text{ 式} \quad \text{となる。}$$

上式においてモーメントはコマの傾斜角 θ が増大する方向を正としている。

$mgr\sin\theta$ は重力モーメント、 $(L_3\dot{\phi} - I\dot{\phi}^2\cos\theta)\sin\theta$ は重力モーメントに対抗するジャイロモーメントである。 $I\ddot{\theta}$ は、両者の差、即ち章動のモーメントを示している。

上式からジャイロモーメントは歳差運動の角速度 $\dot{\phi}$ の反作用によって生じていると考えられる。 $\dot{\phi}$ は一定のように見えるが、実は変動していてそれによって章動が起こる。

重力モーメントとジャイロモーメントが釣り合った状態が、 $\dot{\phi}$ が一定の章動を伴わない定常的な歳差運動となる。

続いて、(1.22) 式に(1.9) 式を代入して角加速度 $\ddot{\theta}$ を重力モーメント成分とジャイロモーメント成分に分類し、単振動の型に合わせて正規化したものが下式である。

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{L_3}{I}\right)^2 \left\{ \left(\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin^2\theta} \right) \left(1 - \left(\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin^2\theta} \right) \cos\theta \right) \sin\theta - \frac{\sin\theta}{S} \right\} \quad (1.23) \text{ 式}$$

安定度 $S = L_3^2 / mgrI$

上式において、 $\left(\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin^2\theta} \right) \left(1 - \left(\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin^2\theta} \right) \cos\theta \right) \sin\theta$ (1.24) 式 は、 θ_0 と変数 θ のみで

構成される独立した関数でこれを章動の数値パターンと呼ぼう。

角加速度 $\ddot{\theta}$ は、この数値パターンを(1.23) 式に従って変換することにより得られる。

図 1.4 は θ_0 を 15° ピッチで変えた時の数値パターンである。

各数値パターンのグラフはコマの変動域 $\theta_0 \sim \theta_e$ の外側においても計算できるが、図 1.4 においては物理的に意味のある変動域の部分のみを切り出している。

各数理パターンのグラフの始点と終点が安定度 $S=4$ に対応した θ_0 と θ_e である。

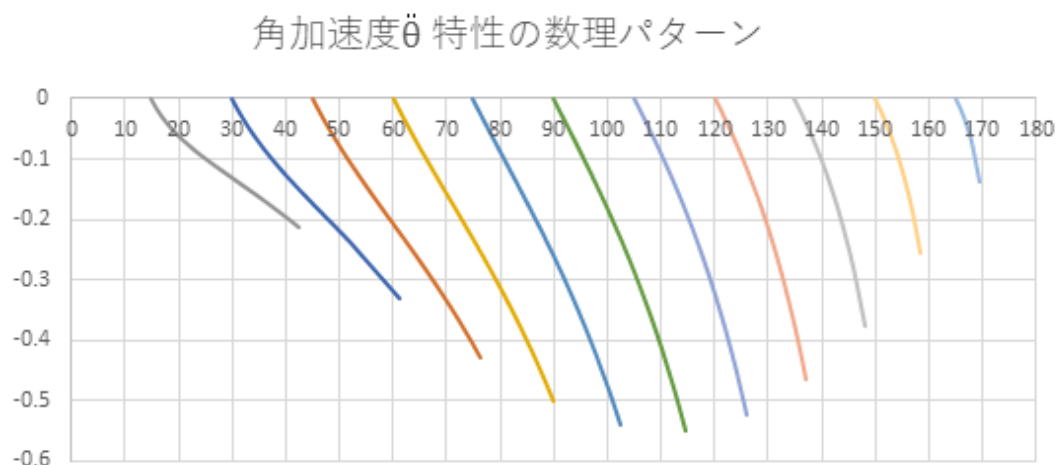


図 1.4 角加速度 $\ddot{\theta}$ 特性の数理パターン 横軸 θ 縦軸 $\ddot{\theta}$

章動を単振動で近似させるには、(1.19)式で示したように角加速度 $\ddot{\theta}$ 特性をいかに直線で近似できるかにかかっている。

図 1.4 を眺めると、特性の曲がりの程度は両側になるほど強くなっていることがわかる。そこで曲がりの特質を究明するため、曲がりの強い $\theta_0=15^\circ$ の特性を(1.23)式に従って図式化したものが図 1.5 である。

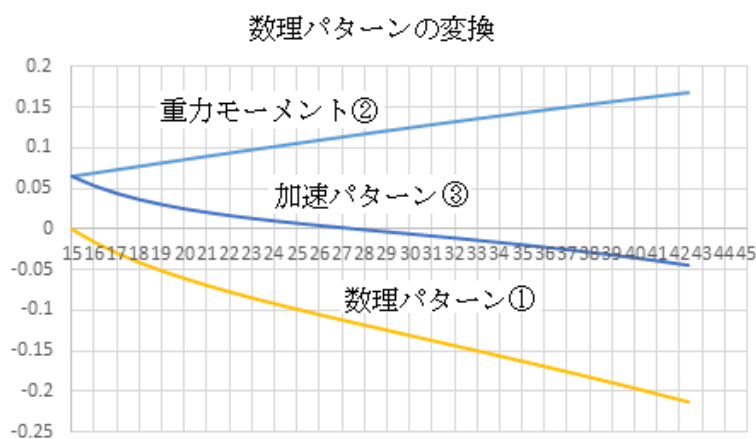


図 1.5 角加速度 $\ddot{\theta}$ 特性 横軸 θ 縦軸 $\ddot{\theta}$

数理パターン①から加速パターン③へ $S=4$ $\theta_0=15^\circ$

図において①の特性が数理パターンでコマの形状、重さ、回転数等とは無関係な幾何学的な特性である。ここではコマの変動域 $\theta_0 \sim \theta_e$ の部分のみを表示している。

②の特性は重力モーメントの成分 $\sin \theta / S$ である。

③の特性は②と①の差分でこれが章動の角加速度 $\ddot{\theta}$ となる。

数理パターンの特性①は重力モーメントの特性②によって底上げされた特性③となるが、この時 $\ddot{\theta}=0$ 点は 15° から 27.75° に移動する。これによって章動が形成される。

$27.75^\circ - 15^\circ = 12.75^\circ$ の約 2 倍がコマの変動幅に相当する。

(1.23)式の $\sin \theta / S$ の項において、 S が増大すると数理パターンの特性①の底上げ分が減少するため $\ddot{\theta}=0$ 点の移動量が減少し、変動幅が小さくなることがわかる。逆に S が減少すると変動幅が大きくなりコマは大きくふらつくようになる。

ここで、特性③を数理パターンに対応させて加速パターンと呼ぼう。

加速パターンは数理パターンに安定度 S のみを作用させたものである。

最終的に $\ddot{\theta}$ は特性③を(1.23)式に従って $(L_3/I)^2$ 倍することによって求められる。

L_3 と I は S を求める際に使用した L_3 と I を適用する。

つまり章動は、数理パターン→加速パターン→倍数乗算の三段構成となっていることがわかる。

5 章動が最大変動幅になる時の諸現象

安定度 S 一定の条件下で、章動の変動幅が最大になるところでは章動を象徴するような特筆すべき現象が起こっていると予想される。

そのためここでは、章動の最大変動幅に焦点を当てて検討する。

<章動の θ_0 における変動幅が最大になる時の θ の位置>

手順として初めに、(1.12)式から $\cos \theta_0$ を $\cos \theta_e$ で表しておく。

$$\cos \theta_0 = -\frac{2}{S} \cos^2 \theta_e + \cos \theta_e + \frac{2}{S} \quad (1.25) \text{式}$$

次に $(\theta_e - \theta_0)$ を $f(\theta_e)$ の関数として、極大値を求めるために θ_e で微分する

$$\frac{df}{d\theta_e} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_0}} \frac{d\cos \theta_0}{d\theta_e} = 0 \rightarrow \frac{d\cos \theta_0}{d\theta_e} = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta_0}$$

$$\left(1 - \frac{4}{S} \cos \theta_e\right) \sin \theta_e = \sin \theta_0 \quad (S \geq 4) \quad (1.26) \text{式}$$

$$\text{上式の両辺を自乗して、} \left(1 - \frac{4}{S} \cos \theta_e\right)^2 \sin^2 \theta_e = \sin^2 \theta_0 = 1 - \cos^2 \theta_0$$

上式の $\cos^2 \theta_0$ に(1.25)式を代入して整理すると下式となる。

$$\frac{3}{S} \cos^4 \theta_e - \cos^3 \theta_e - \frac{2}{S} \cos^2 \theta_e + \cos \theta_e - \frac{1}{S} = 0 \quad (1.27) \text{式}$$

これを $\cos \theta_e$ の四次方程式として、その根の一つが $\cos \theta_e$ となる。

この $\cos \theta_e$ を(1.25)式に代入すると $\cos \theta_0$ が求められる。

尚、四次方程式の解を求めるには下記の計算サイトが便利である。

参照 四次方程式の解 - 高精度計算サイト (casio.jp)

<https://keisan.site/exec/system/1177976627>

ここで、例として安定度 $S=4$ において変動幅が最大になる時の θ_0 を求めてみよう。

まず(1.27)式に $S=4$ を代入し、下記の四次方程式を得る。

$$0.75\cos^4\theta_e - \cos^3\theta_e - 0.5\cos^2\theta_e + \cos\theta_e - 0.25 = 0$$

上記の計算サイトを使って有効な解を求めると $\cos\theta_e = 0.3333$ となる。

これを(1.25)式に代入し、 $\cos\theta_0 = 0.7778 \rightarrow \theta_0 = 38.94^\circ$ (図 1.3 参照)

次に、 S が巨大になったケースを考えると、四次方程式は 4 つの解を持つがそのうち 0 に近い根を採用すると、 $\cos^2\theta_e \approx 0 \rightarrow \cos\theta_0 \approx 0 \rightarrow \theta_0 \approx 90^\circ$ となる。

これは、最大変動幅は S の増大に従って $\theta_0 = 90^\circ$ の方向にシフトするが、同時に最大変動幅そのものが 0 に近づいてゆくことを意味している。

図 1.6 に先ほど計算した最大変動幅を示す時の加速パターンを示す。

曲線で示されたものが加速パターンで、直線は加速パターンの両端、 θ_0 と θ_e に対応する角加速度 $\ddot{\theta}$ の点を結んだものである。

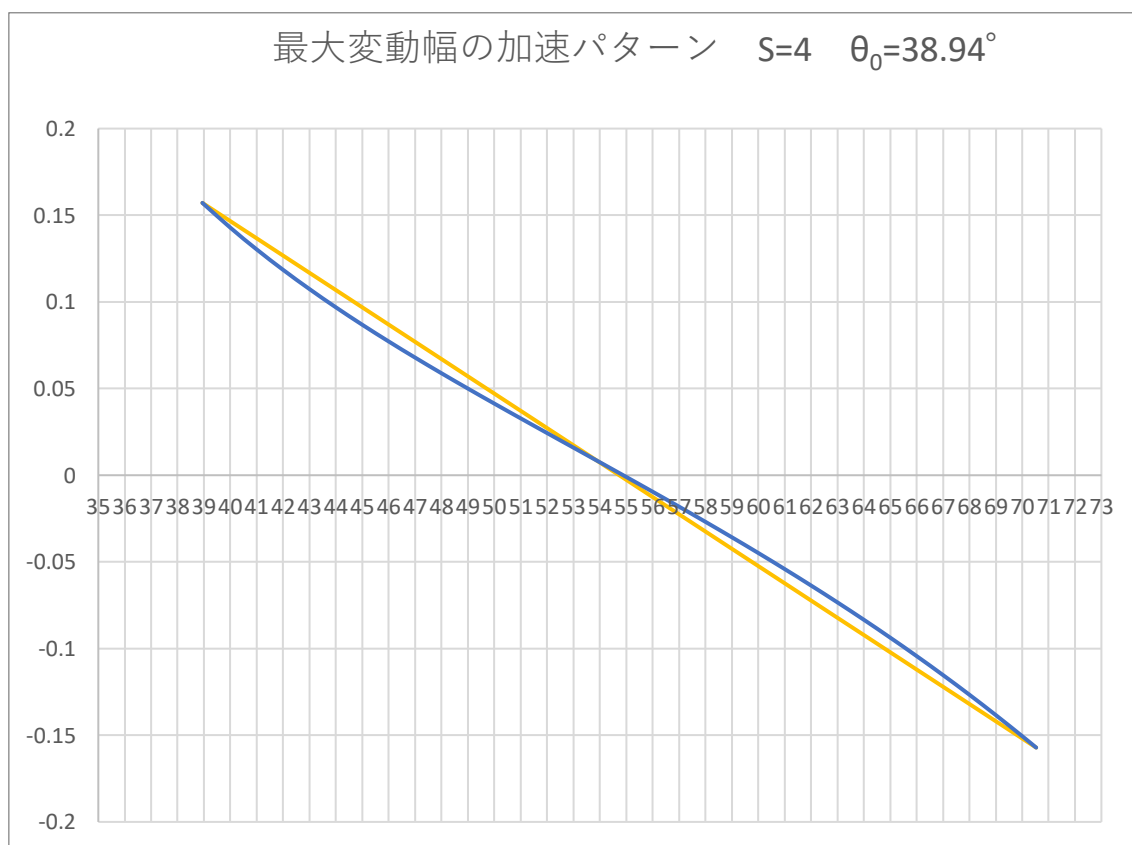


図 1.6 最大振幅時の加速パターン $S=4$ $\theta_0=38.94^\circ$ $\theta_c=54.74^\circ$

図 1.6 は加速パターンを代表するもので、次のような特質を有している。

- ① 最大変動幅 $\theta_0 \sim \theta_e$ の両端における $\ddot{\theta}$ の絶対値は等しい

$$\theta_0 \text{ の } \ddot{\theta} \text{ は (1.23) 式から簡単に求まり、} \ddot{\theta} = \left(\frac{L_3}{l}\right)^2 \frac{\sin \theta_0}{S} \text{ となる。}$$

問題は θ_e の角加速度 $\ddot{\theta}$ であるが、ここで (1.12) 式を導き出す前提となった (1.11) 式に着目す

$$\text{ると } \frac{(\cos \theta_0 - \cos \theta_e)}{\sin^2 \theta_e} = \frac{2mgrl}{L_3^2} = \frac{2}{S} \text{ となる。}$$

$$\text{これを (1.23) 式に代入して整理し、(1.26) 式の関係を挿入すると、} \ddot{\theta} = -\left(\frac{L_3}{l}\right)^2 \frac{\sin \theta_0}{S} \text{ となる。}$$

これは、(1.23) 式に θ_0 を代入した時の、符号を負に変えたものである。

このことから、 $\ddot{\theta}$ の両者を結ぶ直線は変動幅の中央値 θ_c を通ることがわかる。

尚、 $\ddot{\theta}=0$ となる θ は 54.88° で、 $\theta_c=54.74^\circ$ よりも 0.14° 大きくなった。

コマの場合、単振動とは異なり一般的に $\ddot{\theta}$ と θ_c には微小なずれがある。

一致するのは、一定の S に対し θ_0 は一点のみである。

- ② 最大変動幅 θ_0 と θ_e の両端の $\ddot{\theta}$ を結ぶ直線は、加速曲線と交わる。

図 1.7 は図 1.4 の数理パターンを $S=4$ で加速パターンに変換したものである。

加速パターンの形状は、 θ_0 と θ_e に対応する角加速度の点を結ぶ直線と加速曲線によって形成される図形によって三つに分類される。

一つは図 1.6 のような両端を結ぶ線が、加速曲線の中央で交わるケースである。

プロペラを半割にした形をしているので、これをプロペラ形の加速曲線と呼ぼう。

残りの二つは、図 1.7 に示すように θ_0 と θ_e の両端を結ぶ線が、加速パターンと交わることなく弓形をしているケースで、弓のふくらみが直線の下側と上側にあるものに分かれる。

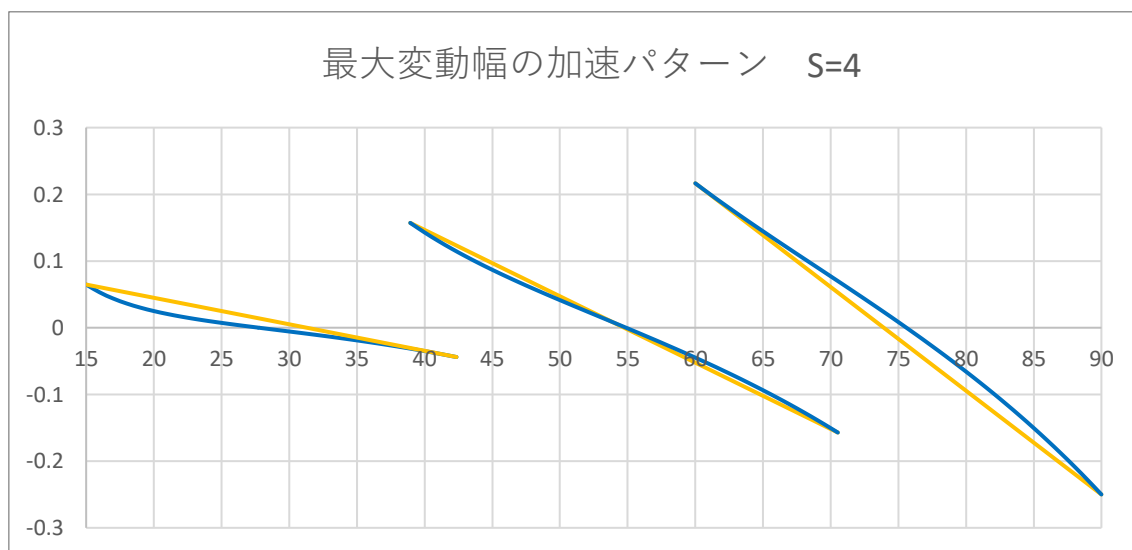


図 1.7 加速パターン $S=4$ 右から $\theta_0=15^\circ$ $\theta_0=38.94^\circ$ $\theta_0=60^\circ$

加速パターンは重力モーメントにより、下側にふくれた弓形からプロペラ形、さらに上側にふくれた弓形へと変化してゆく。最大変動幅 θ_0 においては、上下の角加速度が等しいプロペラ形で、これを境に上下の弓形にわかれてゆく。

S が増大してゆくと、弓形のふくらみが減少し直線に近づいてゆく。

従って、S の増大は単振動への近似性を高めてゆくが、皮肉なことに章動自体が消滅してゆく結果となる。

6 章動の周期と波形

章動を単振動で近似させるには、(1.19)式で示したように $\ddot{\theta}$ 特性をいかに直線で近似できるかにかかっている。

図 1.4 を眺めると、特性の曲がり具合は両側になるほど強くなっていることがわかる。

そこで、曲がりの特質を明らかにするため、曲がりの強い加速パターン $S=4$ $\theta_0=15^\circ$ の特性を検討する。図 1.8 に図 1.5 の加速パターン③の拡大図を示す。

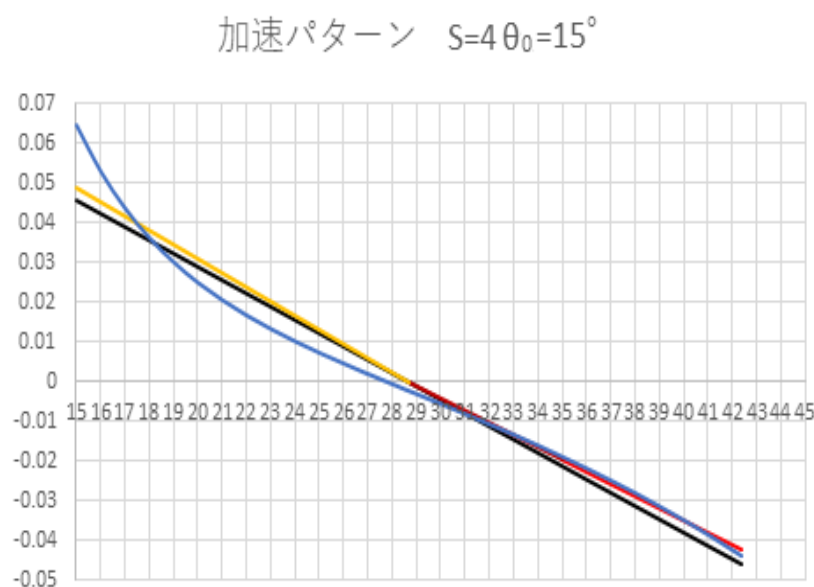


図 1.8 角加速度 $\ddot{\theta}$ 特性と回帰直線 加速パターン $S=4$ $\theta_0=15^\circ$ 横軸 θ 縦軸 $\ddot{\theta}$

ここで図 1.8 の加速パターンを直線で近似することを検討する。

精密な近似は後述の数値積分にゆずるが、ここでは章動の動きを理解するための一助として二つの方法を紹介する。

一つは S の小さなところにおける誤差は大きいが最も簡便な方法である。

変動幅は(1.13)式または図 1.3 で求められているので、問題は角振動数 ω であろう。

図 1.8 において、変動幅の上限 θ_0 と下限 θ_e の位置における角加速度 $\ddot{\theta}$ を $\ddot{\theta}_0$ と $\ddot{\theta}_e$ とすると、大まかには $\ddot{\theta}$ 特性の傾き k は下記で表される。(θ の単位は rad)

$$k = -\frac{\ddot{\theta}_e - \ddot{\theta}_0}{\theta_e - \theta_0} > 0 \quad (1.28) \text{式}$$

これを単振動の運動方程式に近似させると $\ddot{\theta} = -k\theta$ となり、角振動数 ω は $\omega = \sqrt{k}$ (1.29) 式となる。

角加速度 $\ddot{\theta}$ の計算は (1.23) 式で計算するが、 θ_0 の位置における $\ddot{\theta}_0$ は $\ddot{\theta}_0 = \left(\frac{L_3}{l}\right)^2 \frac{\sin \theta_0}{s}$ となる。
上記に具体的な数値 $\theta_0 = 15^\circ$ $\theta_e = 42.36^\circ$ を入れて計算すると、 $k = -0.228$ $\omega = 0.477$ となる。

次に、回帰直線を使った方法を紹介する。

図 1.8 において、章動の中央値 $\theta_c = 28.68^\circ$ から $\theta_0 = 15^\circ$ 側に伸びる回帰直線の傾きを k_1 、 $\theta_e = 42.36^\circ$ 側に伸びる回帰直線の傾きを k_2 とする。
最小自乗法の下式により回帰直線の傾き k を求める。

$$k = -\frac{\sum(\theta_i - \theta_c) \ddot{\theta}_i}{\sum(\theta_i - \theta_c)^2} \quad (1.30) \text{式}$$

上式より求めた傾きは $k_1 = 0.2048$ 、 $k_2 = 0.1776$ であった。

加速パターンの曲がり具合から当然 $k_1 > k_2$ となる。

このことは、半波の波長が上下で異なることを示している。

両者の周期 T とすると、 $k = \omega^2$ の関係から、両者の周期は $T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k_1}}$ (1.31) 式

$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{k_2}}$ (1.32) 式で、これから求められる総合的な周期 T は

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = \pi \left(\frac{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1 k_2}} \right) \quad (1.33) \text{式となる。}$$

従って、 ω_p は $\omega_p = \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}}$ (1.34) 式となる。

これに上述の $k_1 = 0.2048$ 、 $k_2 = 0.1776$ を代入すると、 $\omega_p = 0.4364$ となる。

今、 θ_0 から出発して中央値 θ_c に至るまでの継続時間を $T_1/2$ 、中央値 θ_c から波高値 θ_e に至るまでの継続時間を $T_2/2$ として、波長比率 W_p を $W_p = T_1 / (T_1 + T_2)$ (1.35) 式と定める。

そうすると、近似的な波長比率 W_p は $W_p = \frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}}$ (1.36) 式となる。

これに上述の $k_1 = 0.2048$ 、 $k_2 = 0.1776$ を代入して、 $W_p = 0.482$ となる。

$k_1 = k_2$ の時、図 1.8 の折れ曲がった 2 本の回帰直線は 1 本に統合され、 W_p は 0.5 となる。

図 1.9 は (1.23) 式において $(L_3/I) = 1$ とした時の加速パターンを数値積分することにより求めた T_1 、 T_2 から (1.33) 式により算出された波長比率 W_p である。

数値積分は刻み幅 1/1000 秒の 4 次ルンゲクッタ法を用いた。

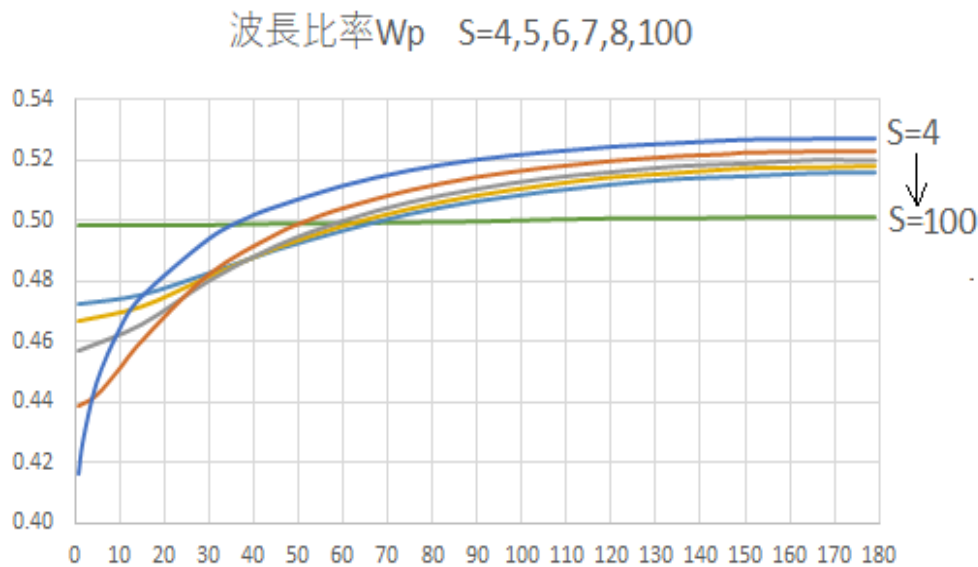


図 1.9 数値積分による波長比率 W_p 横軸 θ_0 縦軸 W_p 右端の上から $S=4, 5, 6, 7, 8, 100$

図において θ_0 の増大に従って波長比率 W_p は単調に増加する。

安定度 S が増加すると変化の幅が減少する。

$S=100$ においては厳密には右肩上がりの直線であるが、ほぼ $W_p=0.5$ の一定値となる。

また安定度 S が増加すると、 $W_p=0.5$ の点も増加するが 90° で極限に達する。

$W_p=0.5$ の点の位置は図 1.3 の変動幅の近傍となる。

図 1.4 の数理パターンは図 1.5 の加速パターンそのものではないが、重力モーメントによる特性の変形は少ないので、図 1.4 を近似的に加速パターンと見なしても良い。

このことを踏まえて図 1.4 の眺めると、ほぼ直線であらわされた特性が $T_1=T_2$ に相当し、特性の曲がり具合によって両者の波長比率が変化することがわかる。

次に、上記の事柄を具体的な事例で検討しよう。

< コマの条件 > $S=4$ $\theta_0=15^\circ$

直径 0.6 m、質量 $m=1$ kg、回転軸周りの慣性モーメント $I_3=0.09$ kgm^2 の鉄製リングで構成された車輪型のコマを想定する。コマの支点から重心までの距離は $r=0.3$ m である。

コマの回転軸に直交する軸周りの慣性モーメントは $I=0.135$ kgm^2 である。

安定度 $S=4$ のコマを対象すると、コマの回転軸周りの角運動量 L_3 は(1.13)式から次のように求められる。

$$L_3^2 = mgrIS = 1 \times 9.8 \times 0.3 \times 0.135 \times 4 = 1.5876 \quad L_3 = 1.260 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

章動の角速度 ω は、前述の $\theta_0=15^\circ$ における加速パターンの $\omega_p=0.4364$ を (L_3/I) 倍して $\omega=4.073\text{rad/s}$ となる。

ここで (L_3/I) は $1.26/0.135=9.333$ である。

またコマを手放す前のコマの角速度（初期値） ω_3 は $\omega_3=L_3/I_3=1.26/0.09=14$ となる。

これはコマの回転数にして2.23回転/秒であり、コマが倒れ始める直前の状態に相当する。

<数値積分との比較>

数値積分は刻み幅1/10000秒の4次ルンゲクッタ法を用いた。

図1.10のグラフは、コマの上下運動のイメージに合わせて θ の増大方向を下にして表示してある。波形は $\theta=\omega t=\pi$ を軸として左右対称であるから、 $\theta=0\sim\pi$ ($t=0\sim0.756\text{s}$)まで計算すればよい。図1.8に示された下側の線がその結果で、上側の $t=0\sim2\text{s}$ の $-\cos$ 波が近似波形である。

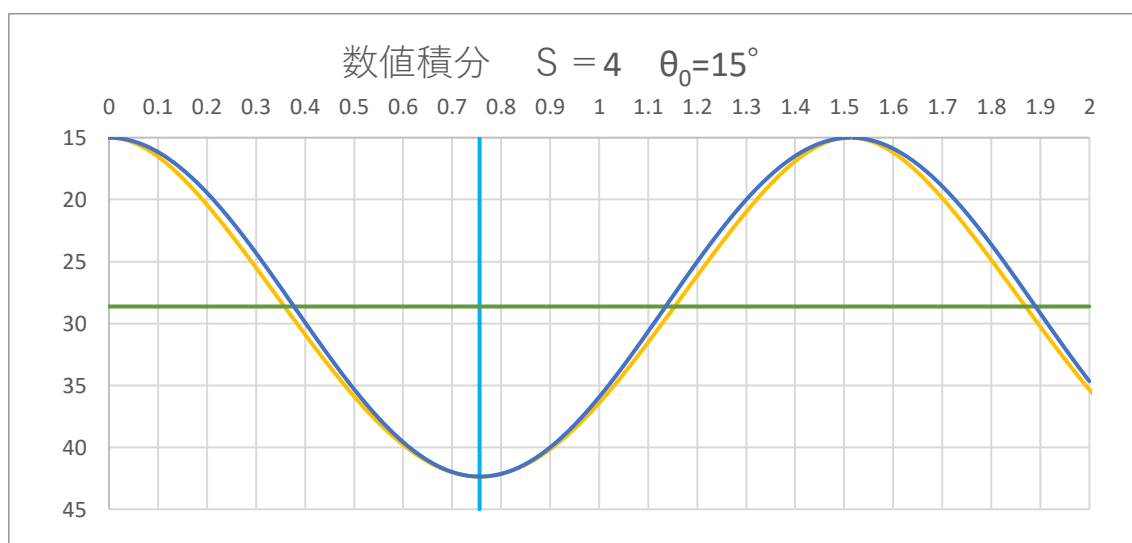


図1.10 近似式と数値積分の波形比較 横軸： t 縦軸： θ

数値積分：橙線（下） 近似波形：青線（上）

$S=4$ $\theta_0=15^\circ$ $\theta_c=28.679^\circ$ $\theta_e=42.358^\circ$

角速度 ω は回帰直線法の 4.073rad/s に対し数値積分は 4.156rad/s で、近似式は数値積分の -2.0% 減となった。

また変動幅の中央値 $\theta_c=28.679^\circ$ における近似的な波長比率 W_p の 0.482 に対し数値積分は 0.475 で、近似式は数値積分の 1.5% 増となった。

これらから、回帰直線による単振動近似は2%程度の精度を有していると推定される。

波長比率 $W_p=0.5$ は、数値的な検討から最大変動幅の近傍にあると推定される。

これまでの近似式の流れを数式で示すと次のようになる。

尚、式中の $\omega_p=0.445$ の値は数値積分の結果を反映した図1.12から読み取ったものである。

$$\theta = A \left(1 - \cos\left(\frac{L_3}{I}\right) \omega_p t \right) + \theta_0 \quad (1.37) \text{式}$$

$$\theta = 13.68^\circ \left(1 - \cos(9.333 \times 0.445t) \right) + 15^\circ \quad S=4 \quad \theta_0=15^\circ \quad \text{となる。}$$

図 1.11 に数値積分と上式との少し長い時間での比較を示す。

数値積分は刻み幅 1/1000 秒の 4 次ルンゲクッタ法を用いた。

周期は次項の図 1.12 の高精度の ω_p を採用しているため振幅と周期には差がないが、前述の図 1.10 のように波形にわずかなずれがあることが認められる。

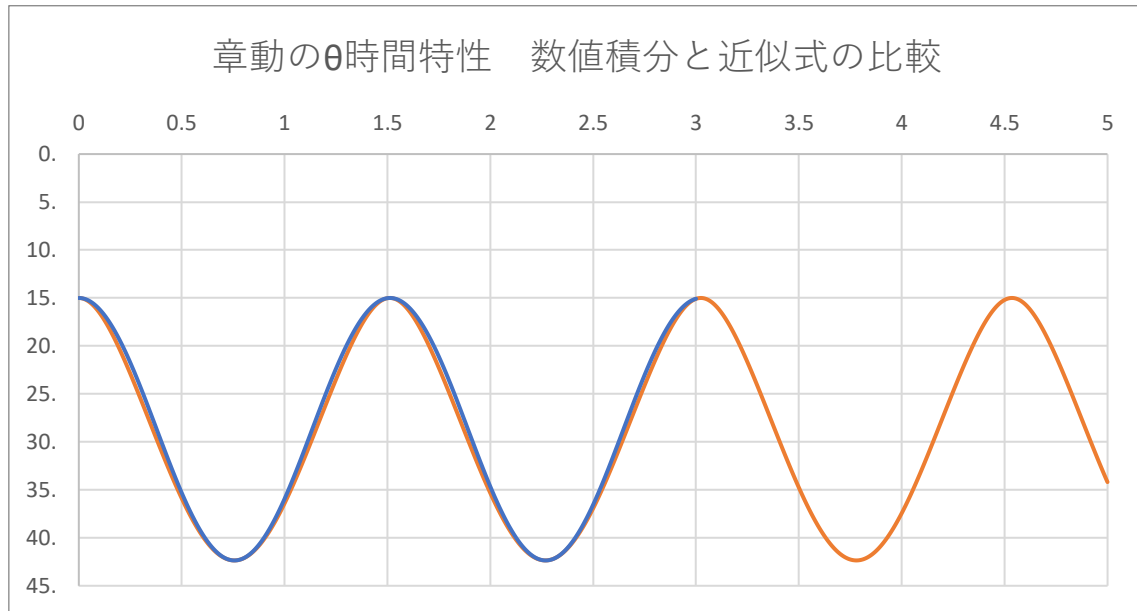


図 1.11 章動の計算結果 数値積分（橙色）と近似式（青色）の比較 $S=4 \quad \theta_0=15^\circ$

横軸：時間 秒 縦軸：変位角 度

7 数値積分を取り込んだ章動の近似式

章動の詳細な解析は数値積分によってなされる。

これまでの近似式の ω は加速パターンの特性を回帰直線に置き換えることにより導かれたものであった。これを数値積分の結果から ω を求め単振動の式 $\ddot{\theta} = -\omega_p^2(\theta - \theta_c)$ に置き換えるとやはり前と同じ近似式が導かれる。

$$\text{近似式} \quad \theta = A \left(1 - \cos\left(\frac{L_3}{I}\right) \omega_p t \right) + \theta_0 \quad (1.37) \text{式}$$

A：振幅

振幅 A は図 1.3 の変動幅の 1/2 で $A = (\theta_e - \theta_o)/2$ (1.16)式である。

振動の中央値 θ_c は $\theta_c = \theta_o + A$ (1.17)式である。

これは理論的に求まるもので基本的に誤差はない。

ω_p : 角振動数

(1.23)式の加速パターンにおいてその角振動数 ω_p を合わせこんだ単振動の式に置き換えると、前述のように角振動数 ω は (L_3/I) に比例する。図 1.12 は精度を上げるため数値積分で求めた加速パターンの ω_p を S をパラメータとして示したものである。

数値積分は刻み幅 1/1000 秒の 4 次ルンゲクッタ法を用いた。

このため、数値積分の精度がそのまま保たれる。

S の増大とともに ω_p は投入角 θ_0 に関わらず均一化され、 $\omega_p = 1$ に収束することが見て取れる。従来の単章動近似である(1.6)式は、(1.37)式の ω_p を1としたものに他ならない。

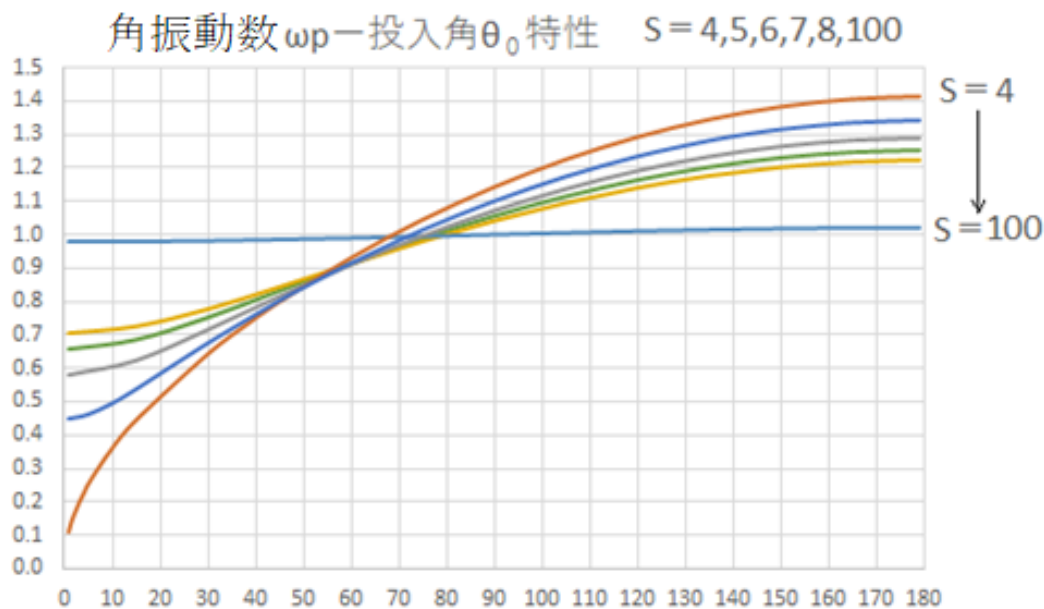


図 1.12 加速パターンの角振動数 ω_p と投入角 θ_0 の関係 横軸： θ_0 縦軸： ω_p
右端の上から $S=4, 5, 6, 7, 8, 100$

参考文献

『自然は方程式で語る』P384～458 大島隆義 名古屋大学出版会 2012