

第1章 「コマの章動のメカニズムと単振動近似」付録
簡明 単振動近似によるエクセル章動波形

はじめに

本稿は「コマの章動のメカニズムと単振動近似」の近似式を使った章動のエクセルによる計算結果である。数式の番号や記号等は共通である。

また本稿は『理科教材で学ぶコマの運動』の一部で、説明で引用する考え方や諸式はすべて下記のサイトにまとめて掲載しています。

コマのワンダーランド 理科教材で学ぶコマの運動<歳差・章動・極運動>

1 検討対象

安定度は $S=6$ 、投入角は $\theta_0=60^\circ$ を選定する。

直径 0.6m、質量 $m=1\text{kg}$ 、回転軸周りの慣性モーメント $I_3=0.09 \text{ kgm}^2$ の鉄製リングで構成された車輪型のコマを想定する。コマの支点から重心までの距離は $r=0.3\text{m}$ である。

コマの回転軸に直交する軸周りの慣性モーメントは $I=0.135 \text{ kgm}^2$ である。

安定度 $S=6$ のコマを対象にすると、コマの回転軸周りの角運動量 L_3 は(1.13)式から次のように求められる。 $L_3^2 = mgrIS = 1 \times 9.8 \times 0.3 \times 0.135 \times 6 = 2.3814 \quad L_3 = 1.5432 \text{ kgm}^2/\text{s}$

安定度は $S=6$ に対応する振幅 A は、(1.13)式または図 1.3 から $A=9.8988^\circ$ となる。

$S=6$ 、 $\theta_0=60^\circ$ の時の加速パターンの角速度 ω_p は、図 1.12 より、 $\omega_p=0.9093$

ここで $(L_3/I) = 1.5432/0.135 = 11.4311$ であるから、最終的な章動の角速度 ω は

$\omega = \omega_p \cdot (L_3/I) = 0.9093 \times 11.4311 = 10.394 \text{ rad/s}$ となる。

また、コマの手放し時の角速度 ω_3 は、 $\omega_3 = (L_3/I_3) = 1.5432/0.09 = 17.147 \text{ rad/s}$ でコマの回転数にして秒速 2.73 回転である。

2 計算方法

近似式 「コマの章動のメカニズムと単振動近似」より

$$\text{近似式 } \theta = A(1 - \cos\left(\frac{L_3}{I}\right)\omega_p t) + \theta_0 \quad (1.35) \text{式}$$

上式に前述の検討対象の数値を代入して

$$\theta = 9.899^\circ(1 - \cos(10.394t)) + 60^\circ$$

安定度 $S=6$ 投入角 $\theta_0=60^\circ$ コマの回転数（初期値）2.73 回転/秒

これにより、時間と θ の関係がわかるので、下式より $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ を導きだせる。

$$\dot{\theta} = \frac{L_3}{I \sin^2 \theta} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \quad (9) \text{式} \quad \ddot{\theta} = \omega_3 - \dot{\theta} \cos \theta \quad (1.3) \text{式}$$

$$\dot{\theta}^2 = (\cos\theta_0 - \cos\theta) \left(\frac{2mg\mathbf{r}}{I} - \frac{L_3^2}{I^2 \sin^2\theta} (\cos\theta_0 - \cos\theta) \right) \quad (1.10) \text{式}$$

さらに、 ϕ と φ は数値積分の簡単な台形法により計算できる。(次の補注参照)

刻み幅は $1/100$ 秒で十分であるのでエクセルの VBA 等は不要である。

(補注) 台形法の解説

台形法は関数を細分化された台形で近似することにより、関数の積分の近似値を得る簡単な方法である。

図 1.13 のように、関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ を n 等分して刻み幅 $h = (b-a)/n$ の小区間に分け、各等分点における関数の値を直線で結んで小区間ごとに台形を作り、この台形の面積を積分区間に足し合わせる。

ひとつの小区間 $[x_i, x_{i+1}] = [a+ih, a+(i+1)h]$ における台形の面積 $\Delta A(x_i)$ は

$$\Delta A(x_i) = \frac{h}{2} \{f(x_i) + f(x_{i+1})\} = \frac{h}{2} \{f(a + ih_i) + f(a + (i + 1)h)\} \text{ で求められ}$$

a から b の積分結果は下式となる。

$$\sum_{i=1}^n \Delta A(x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} \{f(x_i) + f(x_{i+1})\} = h \left\{ \frac{h}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) + \frac{h}{2} f(b) \right\}$$

これをエクセルで解くことは容易である。

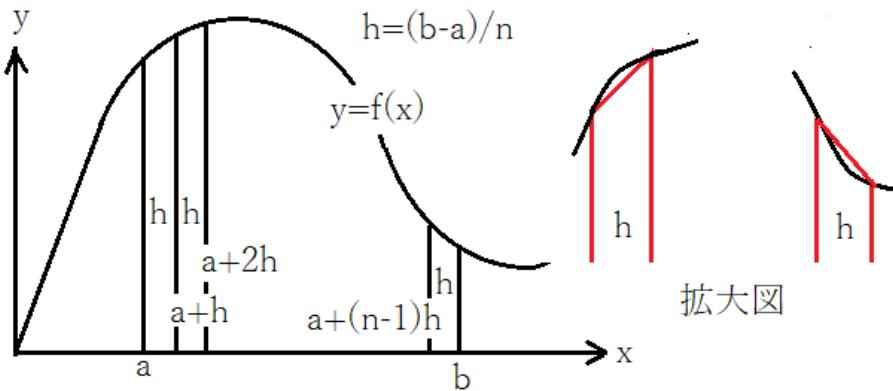


図 1.13 台形法の説明図

台形法の欠点は、図 1.13 の拡大図に示すように関数が凸の範囲では関数の積分値より常に小さく、関数が凹の範囲では関数の積分値より常に大きくなることである。

このため、一般的には精密な計算が必要な場合は適切な方法ではないとされている。

しかしながら、関数の形態によってはこの欠点をおぎなうことができる。

図 1.14 は、歳差運動の角速度 $\dot{\phi}$ と時間の関係を示すルンゲクッタ法による計算結果である。

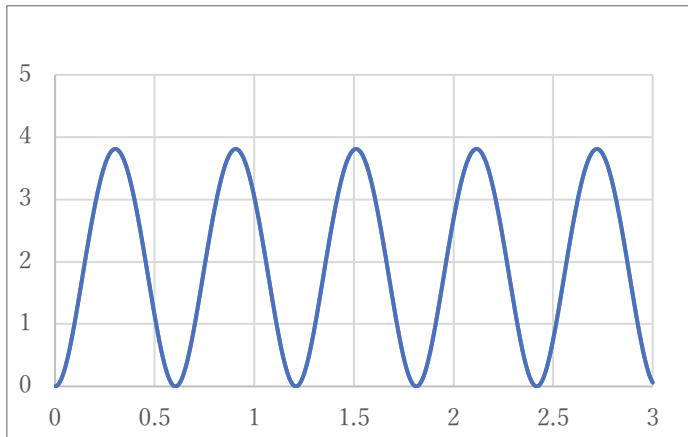


図 1.14 横軸：時間 t 秒 縦軸：歳差運動の角速度 $\dot{\phi}$ rad

ここで注目すべきは、 $\dot{\phi}$ が常に ≥ 0 の範囲にあることである。

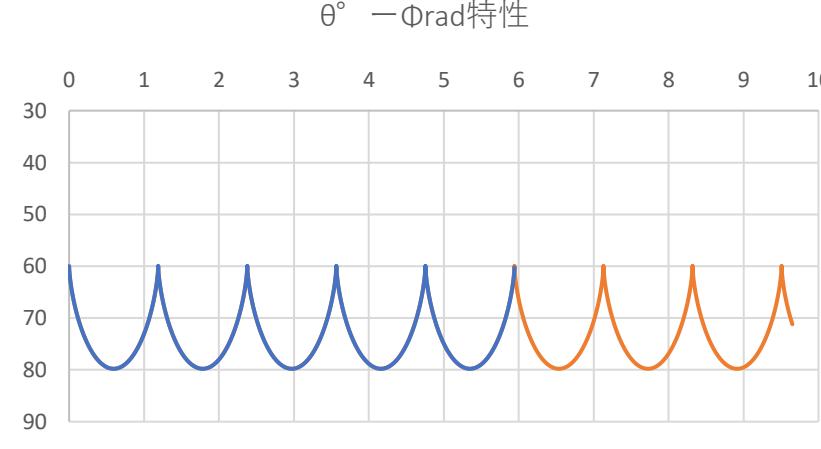
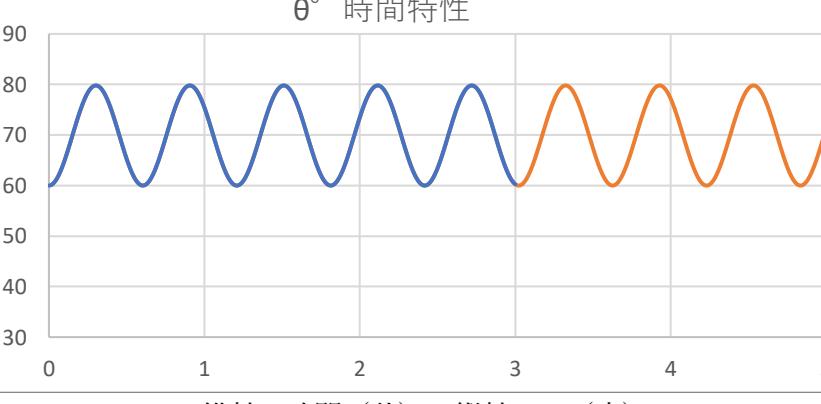
ここで凸と凹が共存しているため、積分の過不足が中和される。

このため台形法でも次に示すようにかなりの精度が期待できる。

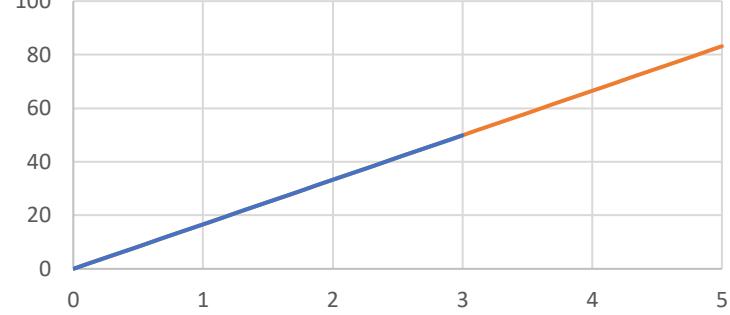
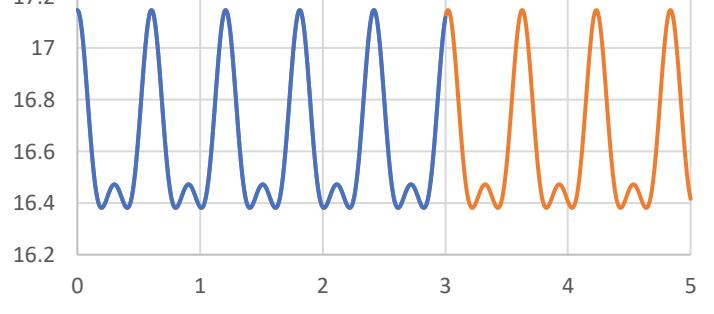
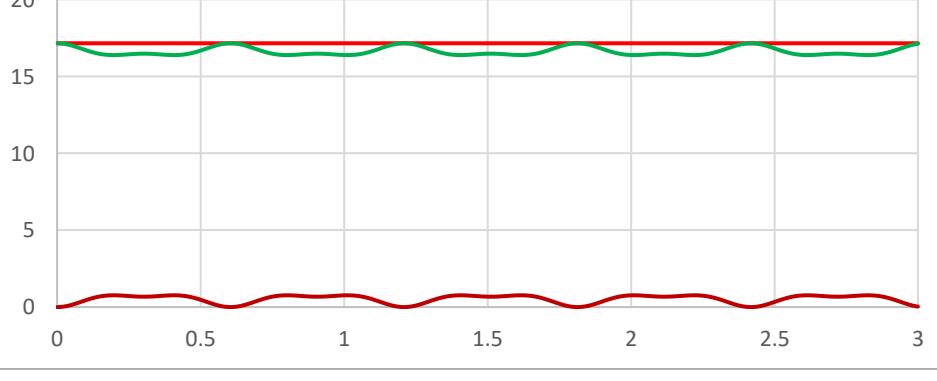
3 計算結果

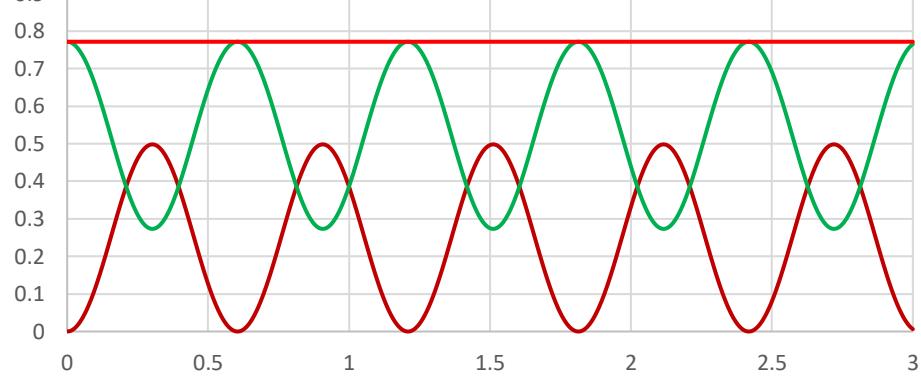
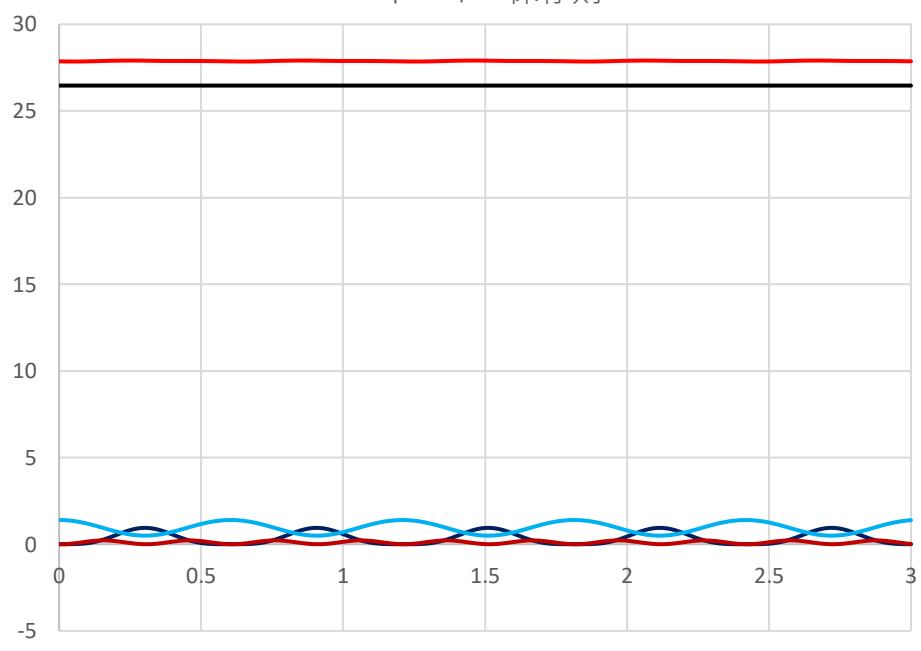
表 1 に単振動近似式を使った計算結果と、刻み幅 1/1000 秒の 4 次ルンゲクッタ法による計算結果を示す。単振動近似式は 3 秒、ルンゲクッタ法は 5 秒まで計算したが、グラフ上の差異は重なり合って目視では認められないことがわかる。

表 1.1 計算結果

図番	単振動近似：青線 ルンゲクッタ法：橙線
T- 1	<p style="text-align: center;">θ° 一Φrad特性</p>  <p style="text-align: center;">横軸：ϕ (rad) 縦軸：θ (度)</p> <p>上図の縦軸 θ の目盛りは落下のイメージに合わせて、下側を θ の増大する方向に設定している。</p> <p>この波形は、コマの教科書に必ず登場するポピューラーな波形である。</p> <p>$\theta = 60^\circ$ でコマを静かに手放した時のコマの先端が描く軌跡である。</p> <p>コマは $\theta = 70^\circ$ を中央値として $\pm 10^\circ$ で振動している。</p> <p>周期は 3 秒 5 波 5 サイクルで、0.6 秒である。</p>
T- 2	<p style="text-align: center;">θ° 時間特性</p>  <p style="text-align: center;">横軸：時間 (秒) 縦軸：θ (度)</p> <p>振動の周期は 3 秒 5 サイクル 0.6 秒で、T- 1 の周期と同じである。</p> <p>T-1 と同様に、$\theta = 70^\circ$ を中央値として $\pm 10^\circ$ で振動している。</p>

T- 3	<p style="text-align: center;">θ_{dot} rad 時間特性</p> <p style="text-align: center;">横軸：時間（秒） 縦軸：$\dot{\theta}$ (rad/s)</p>	
T- 4	<p style="text-align: center;">ϕ_{dot} rad 時間特性</p> <p style="text-align: center;">横軸：時間（秒） 縦軸：$\dot{\phi}$ (rad/s)</p>	
T- 5	<p style="text-align: center;">ϕ rad 時間特性</p> <p style="text-align: center;">横軸：時間（秒） 縦軸：ϕ (rad)</p>	

T- 6	<p style="text-align: center;">コマの回転角rad 時間特性</p>  <p style="text-align: center;">横軸：時間 (秒) 縦軸：ϕ (rad)</p>	
T- 7	<p style="text-align: center;">コマの回転速度rad 時間特性</p>  <p style="text-align: center;">横軸：時間 (秒) 縦軸：$\dot{\phi}$ (rad/s)</p>	
T- 8	<p style="text-align: center;">コマの回転軸 (慣性主軸) のω_3</p>  <p style="text-align: center;">横軸：時間 (秒) 縦軸：$\dot{\phi}$ (緑線), $\dot{\theta} \cos \theta$ (茶線), ω_3 (赤線) (rad/s)</p> <p>コマの回転軸である慣性主軸の角速度 ω_3は角運動保存則により常に一定である。上図の赤線ω_3は $\omega_3 = \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} = \text{一定}$ (3)式を示している。</p>	

T-9	<p style="text-align: center;">角運動量の保存 L_z</p>  <p>横軸：時間（秒）</p> <p>縦軸：$I_3\omega_3\cos\theta$ (緑線), $I\dot{\theta}\sin^2\theta$ (茶線), L_z (赤線) (kgm^2/s)</p> <p>上図は $L_z = I\dot{\theta}\sin^2\theta + I_3\omega_3\cos\theta = \text{一定}$ (1.4)式 を表している。 $I_3\omega_3\cos\theta$ はコマの自転、$I\dot{\theta}\sin^2\theta$ は歳差運動に起因するもので、両者の和は常に一定で、補完的な関係にあることがわかる。</p>
T-10	<p style="text-align: center;">エネルギー保存則</p>  <p>横軸：時間（秒）</p> <p>縦軸：E(赤線) 一定, $\frac{1}{2}I_3\omega_3^2$ (黒線) 一定, $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ (茶線), $\frac{1}{2}I(\dot{\theta}\sin\theta)^2$ (紫線), $mg\cos\theta$ (水線) (J)</p> <p>上図はエネルギー保存則を示している。</p> <p>$E = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 + mg\cos\theta = \text{一定}$ (1.1)式</p> <p>コマの回転エネルギーと位置のエネルギー $mg\cos\theta$ の和は常に一定である。</p>