

第2章 コマの章動の一般化

東亜天文学会 江頭 務

はじめに

単振動近似は、コマを静かに手放した時の章動を計算するためのものであった。しかし、そっと手放すのではなく歳差運動の初期条件 $\dot{\phi}_1 \neq 0$ が存在している場合はどうであろうか。ここでは、第1章「単振動近似」について述べた章動の計算式を一般化することを検討する。

これは、第3章のコマのシミュレーションプログラムの理論式となるものである。

(注) 本稿は『理科教材で学ぶコマの運動』の一部で、説明で引用する考え方や諸式はすべて下記のサイトにまとめて掲載しています。

コマのワンダーランド 理科教材で学ぶコマの運動<歳差・章動・極運動>

<https://yamauo1945.sakura.ne.jp/astronomy.html>

1 コマの一般的な章動パターン

コマの運動について述べた教科書を読むと必ずと言ってよいほどてくるのがコマの先端の章動パターン（図2.1）だ。第1章の「コマの章動のメカニズムと単振動近似」では、図2.1の(b)のケースを取り上げた。

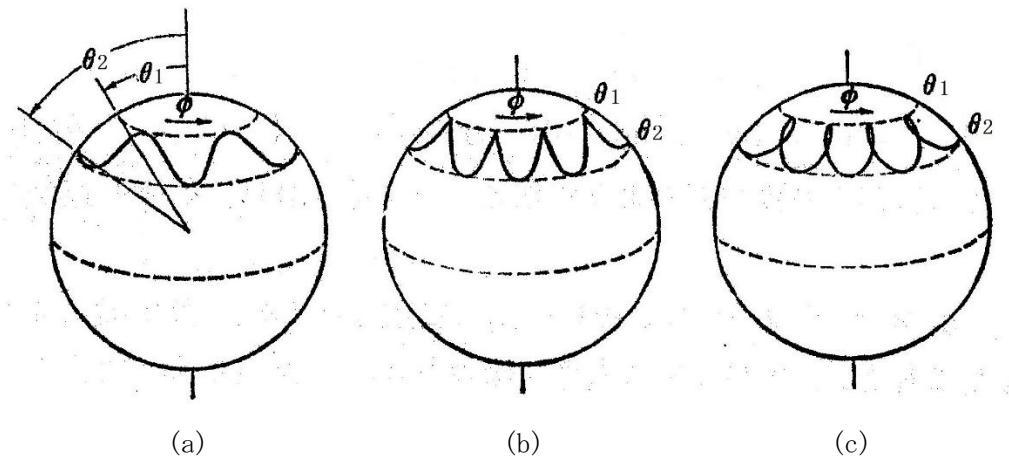


図2.1 歳差と章動によって形成されるコマの先端の運動軌跡

(a) $L_z > L_3 \cos \theta_1$ (b) $L_z = L_3 \cos \theta_1$ (c) $L_3 \cos \theta_1 > L_z$

L_z : 鉛直方向の角運動量 L_3 : コマの回転軸（慣性主軸）の角運動量

$\theta_1 \sim \theta_2$: 章動の変動幅(角度) ϕ : 歳差運動の方向

(注) θ_1 を初期値に設定すると、コマは重力の影響により下降する。 $(\theta_2 > \theta_1)$

しかし、(a)のケースにおいて L_z をさらに増大させてゆくと定常歳差運動と呼ばれる章動がなくなる現象が発生する。（これについては本稿で詳細に述べる）

この時、コマの先端の運動軌跡は直線で表される。 $(\theta_2 = \theta_1)$

ここからさらにLzを増大させるとコマは上昇に転ずる。(θ₂ < θ₁)

通常のコマの現象としては、摩擦などの影響によりこのようなLzの増大が起こりにくいため(b)Lz=L₃cosθ₁近傍のθ₂ > θ₁がコマの一般的な運動パターンとして紹介されている。

まず、大局をつかむために図2.1の説明を簡単にしておこう。

歳差運動の角速度φ̇は一般的な教科書に登場する下式で与えられる。

$$\dot{\phi} = \frac{1}{I\sin^2\theta} (L_z - L_3\cos\theta) \quad (2.1) \text{式}$$

ここでLzとL₃は一定であるから、(a)Lz > L₃cosθ₁ならばθ₁においてφ̇₁ > 0となる。
(b)Lz=L₃cosθ₁ならばθ₁においてφ̇₁ = 0となる。

これは、回転するコマをθ₁でそっと手放した時の初期条件に相当する。

(c)Lz < L₃cosθ₁ならばθ₁においてφ̇₁ < 0となる。

つまりこれらは、θ = θ₁において(a) φ̇₁ > 0 (b) φ̇₁ = 0 (c) φ̇₁ < 0と実際にシンプルなイメージに書き換えることができる。

2 コマの加速特性の一般化

はじめに第1章「章動近似」から下式を引用する。

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{L_3}{I}\right)^2 \left\{ \left(\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin^2\theta} \right) \left(1 - \left(\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin^2\theta} \right) \cos\theta \right) \sin\theta - \frac{\sin\theta}{S} \right\} \quad (1.23) \text{式}$$

安定度 S = L₃² / mgI

(1.23)式は、コマをそっと手放した時の式でφ̇の初期値は0でHz=L₃cosθ₁であった。

ここでLzと重力加速度gを変化させる係数、zとg_zを組み込んで下記のように一般化する。θ₁は図2.1に示したものである。

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{L_3}{I}\right)^2 \left\{ \left(\frac{(\cos\theta_1 + z) - \cos\theta}{\sin^2\theta} \right) \left(1 - \left(\frac{(\cos\theta_1 + z) - \cos\theta}{\sin^2\theta} \right) \cos\theta \right) \sin\theta - \frac{1}{S} \left(\frac{g_z}{g} \right) \sin\theta \right\} \quad (2.2) \text{式}$$

zはLzの附加的な成分で、附加係数zの導入によりLzはLz=L₃(cosθ₁+z)(2.3)式となる。

また、g_zは安定度Sの重力加速度g=9.8m/s²を一般化したものである。

従って、地球上においてはg_z=1gであり、無重力はg_z=0gで表される。

また、g_z < 0の場合も有効である。

上式において $\left\{ \left(\frac{(\cos\theta_1 + z) - \cos\theta}{\sin^2\theta} \right) \left(1 - \left(\frac{(\cos\theta_1 + z) - \cos\theta}{\sin^2\theta} \right) \cos\theta \right) \sin\theta - \frac{1}{S} \left(\frac{g_z}{g} \right) \sin\theta \right\}$ 内の

$\left(\frac{(\cos\theta_1 + z) - \cos\theta}{\sin^2\theta} \right) \left(1 - \left(\frac{(\cos\theta_1 + z) - \cos\theta}{\sin^2\theta} \right) \cos\theta \right) \sin\theta$ がジャイロモーメント成分、 $\frac{1}{S} \left(\frac{g_z}{g} \right) \sin\theta$ が重力

モーメント成分である。章動はこの二成分の相互作用によって発生する。

回転運動においてモーメントMtはMt = Iddθ/dtの形で表され、並進運動における運動方程式F = maに対応したものとなる。

3 コマの定常歳差運動

最初に地球上における ($g_z=1g$) の時の定常歳差運動の条件について検討する。章動の伴わない定常歳差運動は、第1章「単振動近似」で述べたように重力モーメントとジャイロモーメントが釣り合った状態で発生するから下式で表される $\ddot{\theta}$ は常に0である。

$$I\ddot{\theta} = mg_r \sin \theta - (L_3 \dot{\phi} - I\dot{\phi}^2 \cos \theta) \sin \theta = 0 \quad (1.22) \text{ 式}$$

従って、 $I\dot{\phi}^2 \cos \theta - L_3 \dot{\phi} + mg_r = 0$ (2.4)式を満たす $\dot{\phi}$ が定常歳差運動の条件式となる。

定常歳差運動の位置を θ_c とする時、その時の歳差運動の角速度 $\dot{\phi}_c$ は

$$\dot{\phi}_c = L_3 \frac{1 \pm \sqrt{1-4mg_r I \cos \theta_c / L_3^2}}{2I \cos \theta_c} = L_3 \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cos \theta_c / S}}{2I \cos \theta_c} \quad S \geq 4 \cos \theta_c \quad (2.5) \text{ 式となる。}$$

尚、上式において $\sqrt{\cdot}$ の部分 $(1-4 \cos \theta_c / S) \geq 0$ でなければならないから、定常歳差運動の必要条件 $S \geq 4 \cos \theta_c$ (2.6)式が同時に導かれる。

ここで(2.5)式の $\sqrt{\cdot}$ の前が負の時の $\dot{\phi}_c$ を $\dot{\phi}_{c-}$ として第1の定常歳差運動の角速度、 $\sqrt{\cdot}$ の前が正の時の $\dot{\phi}_c$ を $\dot{\phi}_{c+}$ として第2の定常歳差運動の角速度と呼ぶことにする。

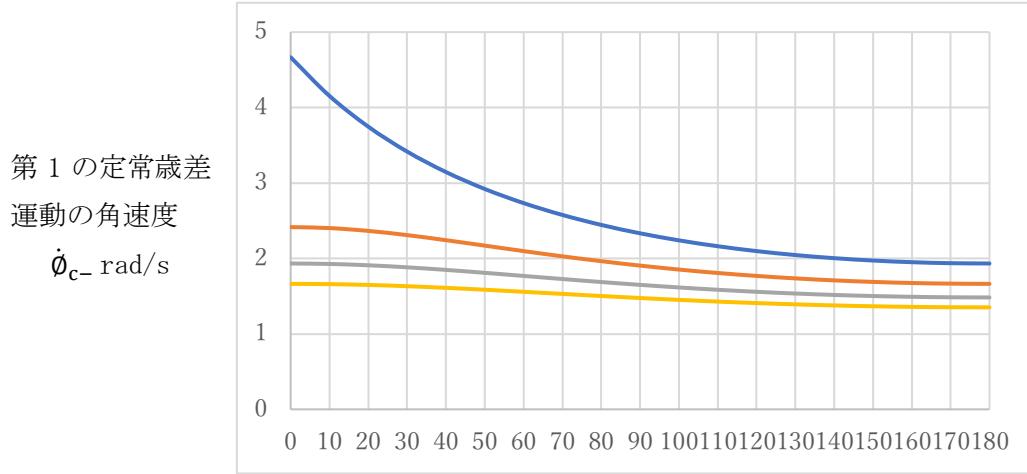
第1と第2の定常歳差運動の角速度の間には $\dot{\phi}_{c-} < \dot{\phi}_{c+}$ の関係がある。

尚、 $\dot{\phi}_{c-}$ の計算においては、 θ_c が 90° の時の算式が0/0の状態となる。

そこで(2.4)式に $\theta = 90^\circ$ を代入すると、 $\dot{\phi} = mg_r / L_3 = L_3 / IS$ at 90° (2.7)式が導けるので、この値を $\dot{\phi}_{c-}$ の値として採用することにする。

図2.2に重力加速度 $1g$ とした時のコマの第1の定常歳差運動の角速度 $\dot{\phi}_{c-}$ とコマの傾斜角 θ_c との関係を示す。

S が大きなほど必要とされる $\dot{\phi}_{c-}$ は大きくなることがわかる。



θ_c 度 S は下から S=4,6,8,10

図2.2 コマの第1の定常歳差運動の角速度 $\dot{\phi}_{c-}$ とコマの傾斜角 θ_c との関係
(重力加速度 1g)

次に定常歳差運動をしている時の L_z を求めよう。

定常歳差運動の傾斜角を θ_c とする時、 L_z は前述の(2.5)式の $\dot{\phi}_c$ を下式に代入すると

$$L_z = \dot{\phi}_c \sin^2 \theta_c + L_3 \cos \theta_c = \text{一定} \quad (1.4) \text{式}$$

L_z を求めるための次式が導かれる。

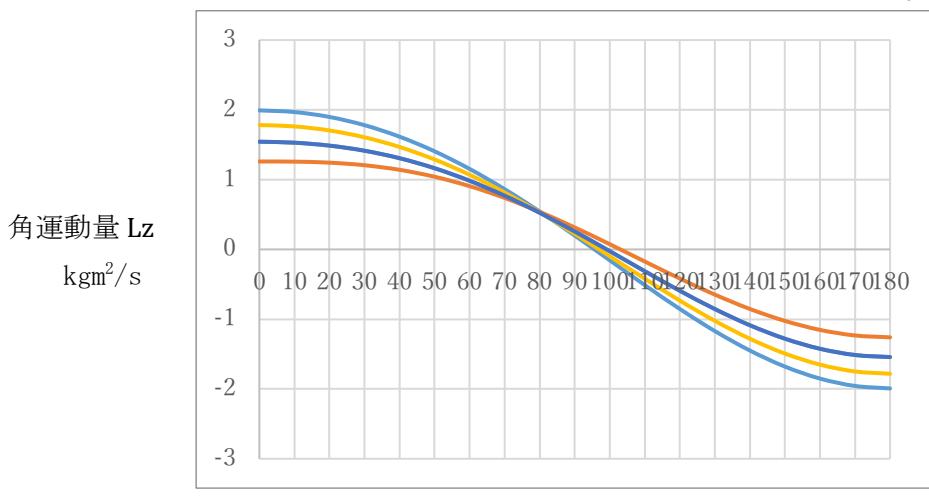
$$L_z = \frac{L_3 \sin^2 \theta_c}{2 \cos \theta_c} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cos \theta_c}{S}} \right\} + L_3 \cos \theta_c \quad (2.8) \text{式}$$

尚、 θ_c が 90° の時上式の第1項は $0/0$ の状態となる。

しかし、(1.4)式に $\theta = 90^\circ$ の $\dot{\phi}_c$ の値である L_3/S を代入すると

$$L_z = L_3/S \text{ at } \theta = 90^\circ \quad (2.9) \text{式} \text{となり、これが } 90^\circ \text{ の時の値となる。}$$

図 2.3 は上式にて求めたコマの鉛直方向の角運動量 L_z とコマの傾斜角 θ_c との関係である。



θ_c 度 S は $\theta_c = 0^\circ$ において下から $S=4,6,8,10$

図 2.3 コマの鉛直方向の角運動量 L_z とコマの傾斜角 θ_c との関係（重力加速度 $1g$ ）

ここで $L_z = L_3(\cos \theta_c + z)$ (2.3) 式を (2.8) 式に代入すると、第1の定常歳差運動を発生する時の角運動量の付加係数 z_{c1} が下式で求められる。

$$z_{c1} = \frac{\sin^2 \theta_c}{2 \cos \theta_c} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cos \theta_c}{S}} \right\} \quad (2.10) \text{式}$$

図 2.4 にコマの角運動量 L_z の付加係数 z_{c1} とコマの傾斜角 θ_c との関係を示す。

尚、 θ_c が 90° の時上式は $0/0$ の状態となるが、(2.3)式に $\theta = 90^\circ$ を代入して z_{c1} を求める
と $z_{c1} = L_z/L_3$ (2.11)式となり、さらに L_z に $L_z = L_3/S$ (2.9)式を代入すると
 $z_{c1} = 1/S$ at 90° (2.12)式となる。これが 90° の値となる。

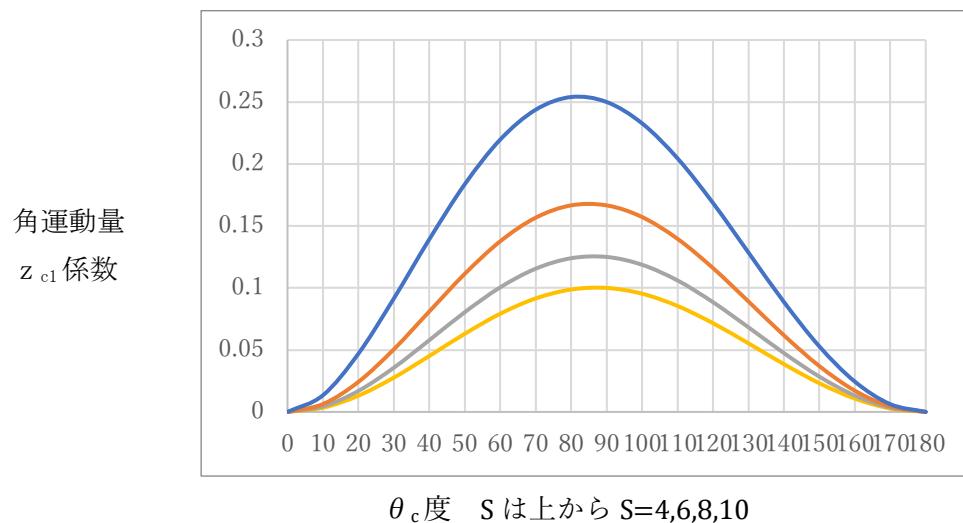


図 2.4 コマの角運動量 L_z の付加係数 z_{c1} とコマの傾斜角 θ_c との関係（重力加速度 $1g$ ）

コマを手放した瞬間から定常歳差運動させるためには、重力モーメントに対抗させるための $\dot{\phi}$ が必要になる。付加係数 z はその指標となるものである。

$z=0$ で $\dot{\phi}$ （初期値）が 0 であれば、コマは必ず少し落下する。

図 2.4 の両端（ 0° と 180° ）においては、コマにかかる重力モーメントが 0 のため付加係数 z_{c1} も 0 となる。いわゆる眠りゴマの状態にある。

コマの傾斜角 θ_c が増大するにつれ重力モーメントも増大するので z_{c1} も増大する。

z_{c1} の極大値は S によって異なるが、 S の増大に従って 90° に収束する傾向にある。

次に、(2.5)式の $\sqrt{\cdot}$ の前が正である第2の定常歳差運動の角速度 $\dot{\phi}_{c+}$ における角運動量の付加係数 z_{c2} を求めてみよう。

これは(2.10)式の $\sqrt{\cdot}$ の前の符号を変えるだけで良いので、式とグラフは次のようになる。

$$z_{c2} = \frac{\sin^2 \theta_c}{2\cos \theta_c} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{4\cos \theta_c}{S}} \right\} \quad (2.13) \text{式}$$

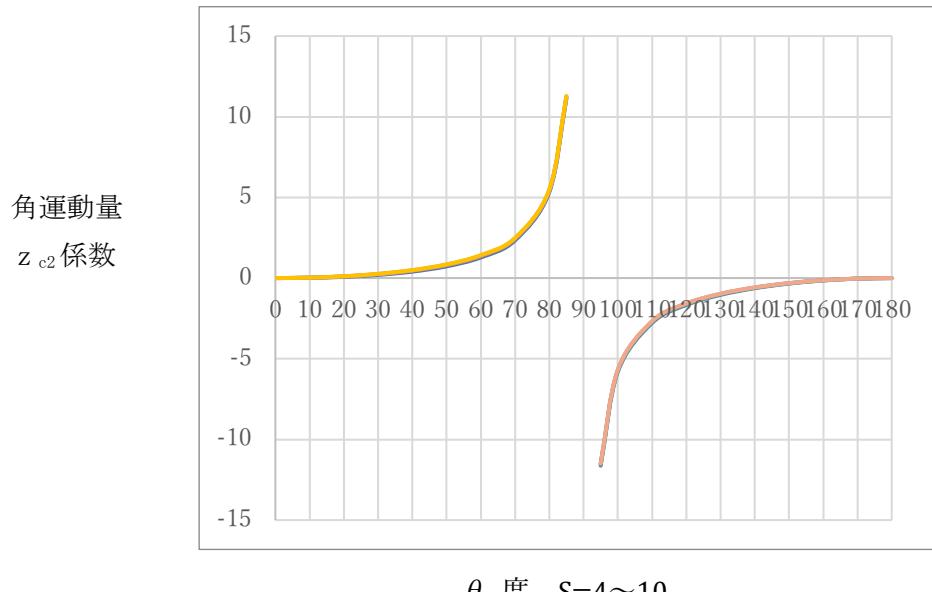


図 2.5 Lz の付加係数 z_{c2} とコマの傾斜角 θ_c との関係 (重力加速度 1g)

図 2.5 のグラフは、S が 4~10 の間ではほとんど重なっている。

またグラフは、(2.13)式の分母に $\cos \theta_c$ があることにより 90° で発散している。

このことから、現実的には 90° 付近では第2の定常歳差運動は存在しないことになる。

4 章動の変動幅

ここでは章動の変動幅を求める。
それにはまずエネルギーの保存則から始めよう。
コマは回転と位置のエネルギーを持ち、全エネルギーEは保存される。

$$E = \frac{1}{2}I(\dot{\phi}\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 + mgrcos\theta = \text{一定} \quad (1.1)\text{式}$$

章動波形の上下のピーク値においては、章動の折り返し点となるので $\dot{\theta}=0$ となる。
そのため、章動の折り返し点の位置を θ_1 とする時、全エネルギーEはその時の歳差運動の値を $\dot{\phi} = \dot{\phi}_1$ として下式で表される。

$$E = \frac{1}{2}I(\dot{\phi}_1\sin\theta_1)^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 + mgrcos\theta_1 \quad (2.13)\text{式}$$

(1.1)式と(2.13)式を等号で結び、章動のエネルギーを求める

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}I\{(\dot{\phi}_1\sin\theta_1)^2 - (\dot{\phi}\sin\theta)^2\} + mg(r(\cos\theta_1 - \cos\theta)) \quad (2.14)\text{式} \quad \text{となる。}$$

ここで $\dot{\phi}_1$ は $\dot{\phi}_1 = \frac{L_z - L_3\cos\theta_1}{I\sin^2\theta_1}$ (2.1)式で表されるから、上式に代入して整理すると章動のエネルギーとして次の三次方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 &= \frac{1}{2I\sin^2\theta_1\sin^2\theta} \left[\frac{2L_3^2\sin^2\theta_1}{S} \left(\frac{g_z}{g} \right) \cos^3\theta + \left\{ 2L_3L_z\cos\theta_1 - L_3^2 - L_z^2 - \frac{2L_3^2\sin^2\theta_1\cos\theta_1}{S} \left(\frac{g_z}{g} \right) \right\} \cos^2\theta \right. \\ &\quad \left. + 2\sin^2\theta_1 \left(L_3L_z - \frac{L_3^2}{S} \left(\frac{g_z}{g} \right) \right) \cos\theta + L_3^2\cos^2\theta_1 + L_z^2\cos^2\theta_1 - 2L_3L_z\cos\theta_1 + \frac{2L_3^2\sin^2\theta_1\cos\theta_1}{S} \left(\frac{g_z}{g} \right) \right] \end{aligned}$$

上式の[]内において $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = 0$ の $\cos\theta$ に関する三次方程式の解を求めればよいが、上式は式を立てた前提から θ_1 の根を持つことが明らかなので下記のように因数分解できる。

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{(\cos\theta - \cos\theta_1)}{2I\sin^2\theta_1\sin^2\theta} \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{2L_3^2\sin^2\theta_1}{S} \left(\frac{g_z}{g} \right) \right) \cos^2\theta - (L_3^2 + L_z^2 - 2L_3L_z\cos\theta_1) \cos\theta \\ &- (L_3^2 + L_z^2) \cos\theta_1 - \frac{2L_3^2\sin^2\theta_1}{S} \left(\frac{g_z}{g} \right) + 2L_3L_z \end{aligned} \right\} \quad (2.15)\text{式}$$

結局、上式の{}内の二次方程式を0とおいて、 $\cos\theta$ を求めればよいことになる。
根を求める式の√前の符号は、負のものを採用する。

次に、 L_z を指標化するために z 係数比率 R_z を導入しよう。
前述の付加係数 z との関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} L_z &= L_3(\cos\theta_1 + z) = L_3(\cos\theta_1 + z_{c1}R_z) = L_3\cos\theta_1 + L_a \\ z &= z_{c1}R_z \quad L_a = L_3z = L_3z_{c1}R_z \end{aligned} \quad (2.16)\text{式}$$

ここで、 L_a は $L_3\cos\theta_1$ に対する z に対応した付加的な角運動量である。

具体例として、次の図 2.6 に章動の変動幅と z 係数比率 Rz との関係を示す。

θ_1 (初期値) と θ_2 は $\dot{\phi}$ の最大値と最小値に対応するが、 $\dot{\phi}$ の初期値を考慮した一般化されたコマにおいては θ_1 が最小値かどうかは Rz の値に左右される。

計算の対象となるコマは、第 1 章「単振動近似」の付録に記載のものとした。

安定度 $S=6$ $L_3=1.543 \text{kgm}^2/\text{s}$ 傾斜角 $\theta_1=60^\circ$ 重力加速度 $g=9.8 \text{m/s}^2$ ($g_z/g=1$)

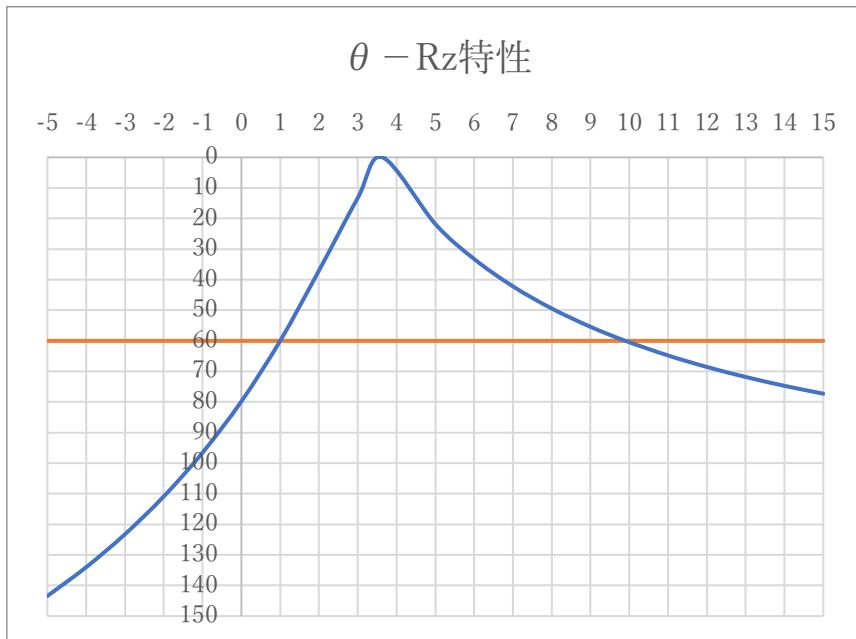


図 2.6 章動の $\theta_1=60^\circ$ からの変動幅と z 係数比率 Rz の関係

上図については第 4 章「角運動量をパラメータとするコマの章動」のところで章動波形と共に詳述するので、ここでは概要を述べるにとどめる。

$Rz=0$ が図 2.1 の(b)のケースで変動幅は $60^\circ \sim 80^\circ$ である。

$Rz=1$ は第 1 の定常歳差、 $Rz=10$ は第 2 の定常歳差で変動幅は 0 である。

尚、 $Rz=10$ は次のように求められる。

(2.10)式または図 2.4 より $z_{c1}=0.1376$ 、(2.13)式または図 2.5 より $z_{c2}=1.3624$

$$Rz = z_{c2}/z_{c1} = 1.3624/0.1376 = 9.9$$

通常のコマは初期値に対して下側に振れるが、第 1 と第 2 の定常歳差の間では上側に振れ、 $Rz=3.634$ のところに 60° から 0° に達するピークがある。

$Rz=3.634$ は $Lz=1.543$ に相当し、これは L_3 に等しい。

この 0° に達するピークに対応する z と Rz_{peak} は、(2.16)式に $Lz=L_3$ を代入して、

$$z=1-\cos \theta_1 \quad (2.17) \text{式}, \quad Rz_{peak}=(1-\cos \theta_1)/z_{c1} \quad (2.18) \text{式} \text{ にて求められる。}$$

この値は S を一定とした時 θ_1 のみに依存する値である。

これは次のように証明される。

(2.15)式の{ }内を0と置き、LzにL₃を代入して整理すると次のようになる。

$$A\cos^2\theta - B\cos\theta + B - A = 0 \quad A = \frac{2L_3^2\sin^2\theta_1}{S} \left(\frac{g_z}{g}\right) \quad B = 2L_3^2(1 - \cos\theta_1)$$

ここで $\cos\theta = 1$ は、上式の根であることがわかる。

つまり Lz=L₃ の条件を満たせば、安定度 S にかかわりなくコマの先端は 0° まで上昇することがわかる。Lz=L₃ の条件に対応する Rzpeak は特異点である。

この近傍では、共振現象に似た歳差とコマの回転速度の劇的な変化が認められる。

これについては、第4章「L変化」のところで波形と共に取り上げているので参照願いたい。

最後にまとめとして、章動の変動幅を求める式を整理して示すと次のようになる。

次式において θ_1 は章動の上限または下限となる初期値である。

これに対して、もう一方の章動の極値である θ_2 が大きくなるか（コマが下降）、小さくなるか（コマが上昇）かは、z 係数比率 Rz ($Rz < Rzpeak$ の範囲) が 1 より小さいか大きいかによって決まる。（図 2.6 参照）

<コマの章動幅 $\theta_1 \sim \theta_2$ を求める一般式> 初期値 θ_1 安定度 $S = L_3^2 / mgI$

$$\theta_2 = \cos^{-1} u \quad u = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.19) \text{式}$$

$$a = \frac{2L_3^2\sin^2\theta_1}{S} \left(\frac{g_z}{g}\right) \quad b = -(L_3^2 + L_z^2 - 2L_3L_z\cos\theta_1)$$

$$c = -(L_3^2 + L_z^2)\cos\theta_1 - \frac{2L_3^2\sin^2\theta_1}{S} \left(\frac{g_z}{g}\right) + 2L_3L_z$$

<補注> 章動の変動幅を求める三次方程式の形

(2.14)式は「参考書」に登場する下式と同質のものであるが、章動のピーク値 θ_1 を自在に指定できることが長所である。下式の E に(2.13)式を代入して整理すれば(2.15)式を導くことができる。

$$u = \cos\theta \quad \dot{u} = -\dot{\theta} \sin\theta \\ \ddot{u}^2 = \frac{2mgr}{I} \left\{ \frac{1}{mgI} \left(E - \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \right) - u \right\} (1 - u^2) - \left(\frac{L_3}{I} \right)^2 \left(\frac{L_z}{L_3} - u \right)^2 \quad (2.20) \text{式}$$

上式は u の三次方程式と上に凸の二次方程式で構成されている。

三次方程式は ±1 の根、二次方程式は Lz/L₃ の重根を有している。

この構成から、三次方程式は下側に引っ張られることになり、u = cosθ は -1 ~ 1 の範囲内に二つの根があることがわかる。（詳細は「参考書」 p429~433 参照）

5 章動の両端における歳差運動の角速度

ここで図 2.1 の変動幅の両端 θ_1 と θ_2 の歳差運動の角速度 $\dot{\phi}$ を求めよう。

それには何度も登場した下式を θ_1 と θ_2 と Rz で表現すればよい。

$$\dot{\phi} = \frac{1}{I\sin^2\theta} (L_z - L_3 \cos\theta) \quad (2.1) \text{式}$$

$<\theta_1\text{における角速度}\dot{\phi}>$

$$\dot{\phi} = \left(\frac{L_3}{I}\right) \frac{z_{c1} Rz}{\sin^2\theta_1} \quad (2.21) \text{式}$$

$<\theta_2\text{における角速度}\dot{\phi}>$

$$\dot{\phi} = \left(\frac{L_3}{I}\right) \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2 + z_c Rz}{\sin^2\theta_2} \quad (2.22) \text{式}$$

計算結果を図 2.6 に示す。角速度はイメージしやすく 1 秒あたりの回転数で表示した。

θ_1 における角速度 $\dot{\phi}$ は直線的に変化するが、 θ_2 における角速度 $\dot{\phi}$ は曲線で $Rz_{peak}=3.63372$ 近傍で発散していることがわかる。

$Rz=0$ はコマをそっと手放したケース、 $\dot{\phi}$ は 0 である。

$Rz=1$ と $Rz=9.9$ では定常歳差運動のため、 $\theta_1 = \theta_2$ で特性はクロスしている。

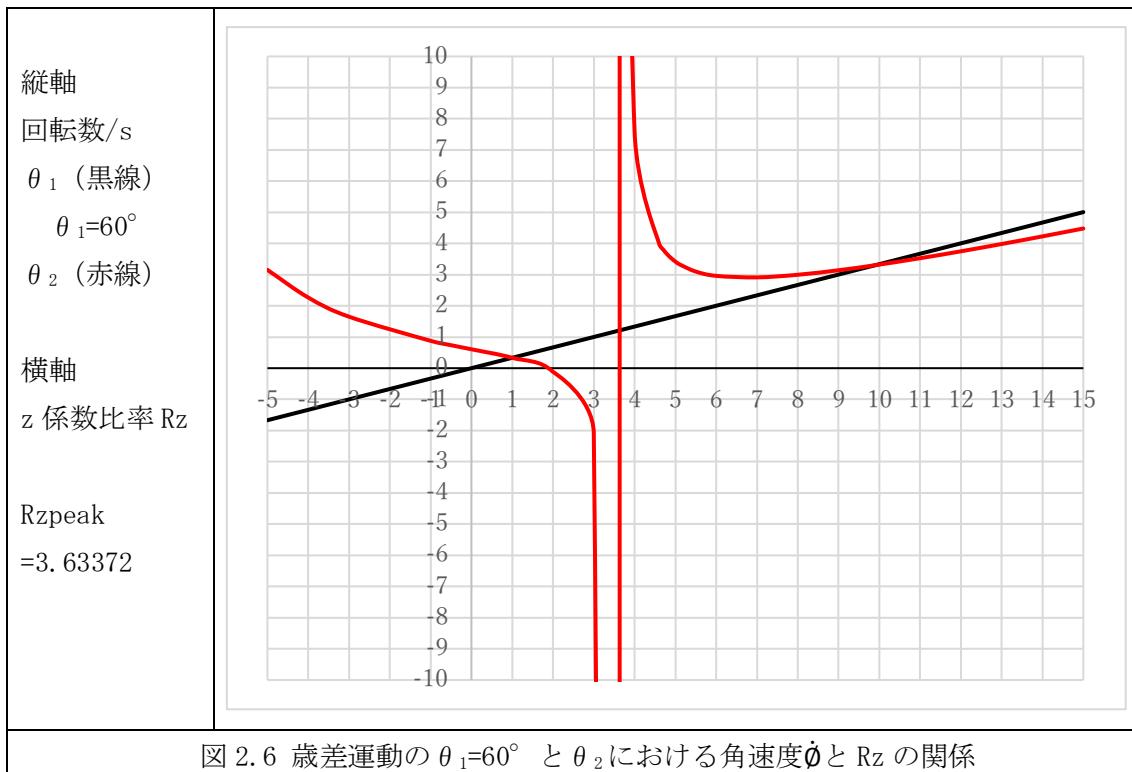


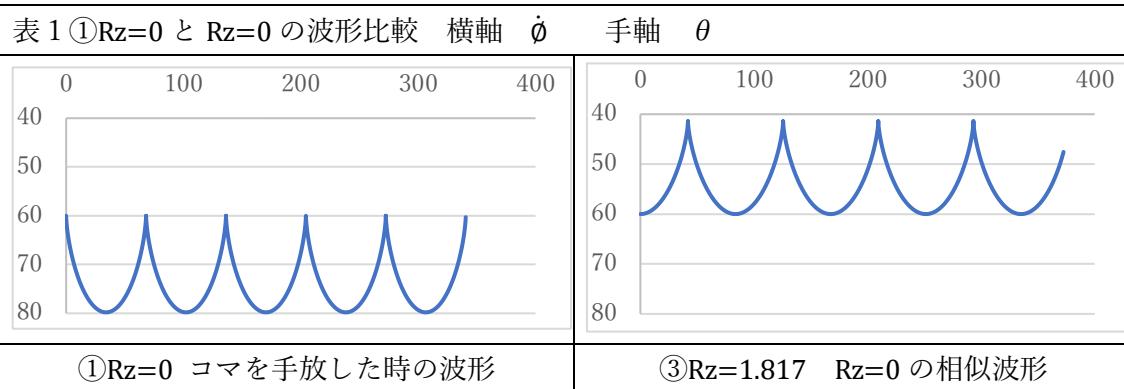
図 2.6 から $\theta - \dot{\phi}$ 波形のターニングポイントとなる Rz は、次の 5 点となることがわかる。

- ① $Rz=0$ コマを手放した時の波形（表 1）
- ② $Rz=1$ 第 1 の定常歳差の直線波形
- ③ $Rz=1.817$ $Rz=0$ の相似波形（表 1）
- ④ $Rz=3.63372$ コマの共振現象の発生
- ⑤ $Rz=9.9$ 第 2 の定常歳差の直線波形

ここで③ $Rz=0$ の相似波形を求める $Rz=1.817$ を算出しよう。

計算の対象となるコマは、第 1 章「単振動近似」の付録に記載のものとした。

安定度 $S=6$ $L_3=1.543 \text{kgm}^2/\text{s}$ 傾斜角 $\theta_1=60^\circ$ 重力加速度 $g=9.8 \text{m/s}^2$ ($g_z/g=1$)



まず、両者の波形の上端は $\dot{\phi}=0$ であることから(2.1)式により $Lz=L_3 \cos \theta_2$ となる。

これを、(2.15)式の { } 部分に代入し $\cos \theta_2$ で整理すると次の三次方程式が導かれる。

$$A \cos^3 \theta_2 - B \cos^2 \theta_2 - A \cos \theta_2 + B = 0 \quad A = L_3^2 \quad B = \frac{2L_3^2 \sin^2 \theta_1}{S} \left(\frac{g_z}{g} \right) + L_3^2 \cos \theta_1$$

さらに上式は次のように因数分解できる。

$$(\cos^2 \theta_2 - 1)(A \cos \theta_2 - B) = 0 \quad \text{これから } \cos \theta_2 = B/A$$

$$\text{つまり、} \cos \theta_2 = \frac{2 \sin^2 \theta_1}{S} \left(\frac{g_z}{g} \right) + \cos \theta_1 \quad (2.23) \text{式が導かれる。}$$

ここで(2.22)式において $\dot{\phi}=0$ と置くと $Rz = (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)/z_{c1}$ (2.24)式となるので、

(2.23)式にて得られた $\cos \theta_2$ を(2.24)式に代入すれば Rz が求められる。

計算例

まず、(2.23)式に $S=6$ $g_z=1 \text{g}$ $L_3=1.543$ $\theta_1=60^\circ$ を代入すると $\cos \theta_2=0.75$ となる。

この時の θ_2 は 41.4° である。（表 1 ③参照）

次に、(2.24)式に(2.10)式または図 2.4 で求められる $z_{c1}=0.1376$ を代入すると $Rz=1.817$ が算出できる。

6 章動の力学的平均位置

第1章「単振動近似」で詳述したように単振動においては振動の平均位置における $\ddot{\theta}$ は0であるが、コマの場合は一般的には $\ddot{\theta} \neq 0$ である。

ここで振動の平均位置を振幅から求められる幾何学的平均位置と見なすならば、 $\ddot{\theta}=0$ は力学的平均位置と見なせるだろう。

前述のように $\ddot{\theta}=0$ に対応するコマの傾斜角 θ は、導出の過程から考えて定常歳差運動を発生するときの θ_c である。

そこで $\ddot{\theta}=0$ となる力学的平均位置を θ_c として求めてみよう。

$\ddot{\theta}$ と θ の関係は、前述の下式で表される。

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{L_3}{I}\right)^2 \left\{ \left(\frac{(\cos\theta_1 + z) - \cos\theta}{\sin^2\theta} \right) \left(1 - \left(\frac{(\cos\theta_1 + z) - \cos\theta}{\sin^2\theta} \right) \cos\theta \right) \sin\theta - \frac{1}{S} \left(\frac{g_z}{g} \right) \sin\theta \right\} \quad (2.2) \text{式}$$

上式の{}内を0とおいて、 $\cos\theta$ を $\cos\theta_c$ として整理すると、次の4次方程式が導ける。

$$\frac{1}{S} \left(\frac{g_z}{g} \right) \cos^4\theta_c - ((\cos\theta_1 + z) + \frac{2}{S} \left(\frac{g_z}{g} \right)) \cos^2\theta_c + ((\cos\theta_1 + z)^2 + 1) \cos\theta_c + \frac{1}{S} \left(\frac{g_z}{g} \right) - (\cos\theta_1 + z) = 0 \quad (2.25) \text{式}$$

4次方程式の解法は煩雑なので、下記のサイトが便利である。

4次方程式の解 - 高精度計算サイト (casio.jp)

<https://keisan.site/exec/system/1177976627>

計算例 1

S=6のコマを $\theta_1=60^\circ$ の位置でそっと手放したときの $\ddot{\theta}=0$ の力学的平均位置 θ_c を求める。

まず、Rz=0 z=0 g_z=1gとして $\cos\theta$ の係数を下記のように求める。

$$a = \frac{1}{S} = 0.1667 \quad b = 0 \quad c = -(\cos\theta_1 + \frac{2}{S}) = -0.8333 \quad d = \cos^2\theta_1 + 1 = 1.25 \\ e = \frac{1}{S} - \cos\theta_1 = -0.3333 \quad \text{答} \quad \cos\theta = 0.3434 \quad \theta_c = 69.92^\circ$$

コマは $60\sim80^\circ$ の間で振動するので、このケースではほとんど中央値が $\ddot{\theta}=0$ の位置となる。

$$\dot{\theta}_1 = L_3 \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cos\theta_1/S}}{2\cos\theta_1} \quad (2.5) \text{式} \quad \text{にて、} \theta_1 = 69.9^\circ \text{ の時の} \dot{\theta}_1 \text{を求める} \rightarrow 2.029 \text{ rad/s}$$

第4章のシミュレーション結果（経過時間0.151秒 $\ddot{\theta}=0$ ）における $\dot{\theta}$ と一致する。

計算例 2

次は、 $\dot{\theta}$ の初期値が0でない少し複雑なケースを計算してみよう。

コマの条件は S=6 $\theta_1=60^\circ$ Rz=0.5 z=0.0688 g_z=1gとする。

$$a = \frac{1}{S} = 0.1667 \quad b = 0 \quad c = -(\cos\theta_1 + z + \frac{2}{S}) = -0.9031 \quad d = (\cos\theta_1 + z)^2 + 1 = 1.3235 \\ e = \frac{1}{S} - (\cos\theta_1 + z) = -0.4021 \quad \text{答} \quad \cos\theta = 0.4203 \quad \theta_c = 65.15^\circ$$

これもシミュレーション結果（経過時間0.791秒 $\ddot{\theta}=0$ ）における $\dot{\theta}$ と一致する。

次に、力学的平均位置 θ_c を目標値とするコマの初期位置 θ_1 を求めてみよう。

これは、(2.20)式を($\cos\theta_1 + z$)で整理し二次方程式を解けばよい。

$$\begin{aligned} \cos\theta_c(\cos\theta_1 + z)^2 - (1 + \cos^2\theta_c)(\cos\theta_1 + z) + \frac{1}{S}(\frac{g_z}{g})\cos^4\theta_c - \frac{2}{S}(\frac{g_z}{g})\cos^2\theta_c \\ + \cos\theta_c + \frac{1}{S}(\frac{g_z}{g}) = 0 \end{aligned} \quad (2.26) \text{式}$$

$$a = \cos\theta_c \quad b = -(1 + \cos^2\theta_c) \quad c = \frac{1}{S}(\frac{g_z}{g})\cos^4\theta_c - \frac{2}{S}(\frac{g_z}{g})\cos^2\theta_c + \cos\theta_c + \frac{1}{S}(\frac{g_z}{g})$$

計算例 3

検算をかねてコマの条件は前述の計算例 1と同じとする。

目標値となる力学的平均位置 θ_c は $\theta_c=69.92^\circ$ である。

$$a=0.343 \quad b=-1.118 \quad c=0.473 \quad \text{答 } \cos\theta_1=0.5 \quad \theta_1=60^\circ$$

計算例 1 の逆計算なので、当然のことながら初期値 $\theta_1=60^\circ$ が導ける。

計算例 4

これも計算例 2 の逆計算をおこなうと力学的平均位置 θ_c は $\theta_c=65.15^\circ$ として

$$a=0.4202 \quad b=-1.1766 \quad c=0.5332 \quad z=0.0688 \quad \text{答 } \cos\theta_1=0.5 \quad \theta_1=60^\circ$$

(2.26)式はコマの初期条件 $u=\cos\theta_1 + z$ を与えることによって、

章動の力学的平均位置 ($\ddot{\theta}=0$) を任意に設定できることを示している。

7 歳差とコマの回転の加速度

歳差の回転の加速度は $\ddot{\theta} = \frac{1}{I\sin^2 \theta} (L_z - L_3 \cos \theta)$ (2.1) 式を微分すると

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{\theta}}{I\sin^3 \theta} (L_3(1 + \cos^2 \theta) - 2L_z \cos \theta) \quad (2.25) \text{ 式が得られる。}$$

また、コマの回転の加速度は $\ddot{\phi} = \omega_3 - \dot{\theta} \cos \theta$ (1.3) 式を微分すると

$$\ddot{\phi} = \dot{\theta} \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta \quad (2.25) \text{ 式が得られる。}$$

初期条件においては $\dot{\theta} = 0$ であるから $\ddot{\theta} = 0$ 、従って $\ddot{\phi} = 0$ となる。

つまり、章動の変動幅の上端と下端においては、歳差とコマの回転の加速度はいずれも 0 となることがわかる。

図 2.7 は第 3 章のエクセル VBA を用いて歳差とコマの角加速度波形をグラフ化したものである。両者の曲線の交点はいずれも 0 rad/s^2 の線状にあることがわかる。

変動幅の小さな波形がコマであるが、歳差の正弦波状の波形とかなり異なっている。

これは、コマ自体の元の速度波形が脈打っているからである。

