

## 第4章 角運動量をパラメーターとするコマの章動

### はじめに

いよいよ第3章で作成したプログラムを用いてコマの運動を調べる。  
 ここでは、鉛直方向の角運動量  $L_z$  をパラメーターとした計算をおこなう。  
 本稿は『理科教材で学ぶコマの運動』の一部で、説明で引用する考え方や諸式はすべて下記のサイトにまとめて掲載しています。

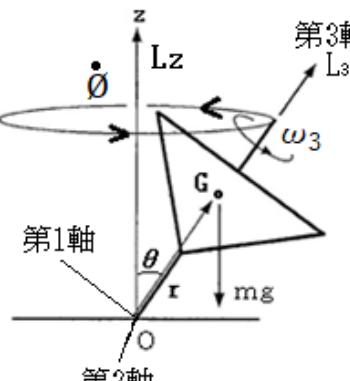
コマのワンダーランド 理科教材で学ぶコマの運動<歳差・章動・極運動>

<https://yamauo1945.sakura.ne.jp/astronomy.html>

### 1 検討の対象となるコマ

最初に検討対象となるコマを以下のように取り決める。

表 3.1 <検討対象となるコマの状態>

	<p> <math>L_z</math>: 鉛直軸の角運動量          第3軸: コマの慣性主軸          コマの軸と同じ          第1軸、第2軸:          第3軸に直交する          慣性主軸  <math>L_3</math>: コマの軸の角運動量  <math>\omega_3</math>: 第3軸の角速度       </p>	<p> <math>\dot{\phi}</math>: 歳差運動の角速度  <math>\theta</math>: コマの軸の傾斜角  <math>g</math>: 重力加速度  <math>m</math>: コマの質量  <math>G</math>: コマの重心  <math>r</math>: 位置ベクトル  <math>O</math>: コマの支点(原点)       </p>
--	---	---

安定度  $S=L_3^2/mgrI=6$  (安定度 S については第1章参照)

重力加速度  $g=9.8m/s^2$  コマの軸の傾斜角  $\theta_1=60^\circ$

質量  $m=1\text{ kg}$   $r=0.3\text{ m}$  コマの回転軸に直交する軸周りの慣性モーメント  $I=0.135\text{ kgm}^2$

回転軸周りの慣性モーメント  $I_3=0.09\text{ kgm}^2$  第3軸の角運動量  $L_3=1.543\text{ kgm}^2/\text{s}$

## 2 コマの先端の運動軌跡 $\theta$ と $\phi$ の波形を求める

図 2.1 は、コマの運動を扱った力学の教科書に必ずと言って登場するコマの先端の運動軌跡だ。これは、鉛直方向の角運動量  $L_z$  によって三つのパターンに分類されている。

図 2.1(a) の  $L_z$  を増大してゆくと、章動の存在しない直線で表示される波形があらわれる。それが第 2 章で詳細に述べた定常歳差運動で、この時の  $L_z$  は、 $L_z=L_3(\cos\theta_1+z)$  (2.3) 式で与えられる。 $z$  は  $L_3\cos\theta$  に追加される角運動量であることから付加係数  $z$  と呼ばれる。付加係数  $z$  は定常歳差運動の要件を与える。

ここでは、付加係数  $z$  を基準とした計算を行う。

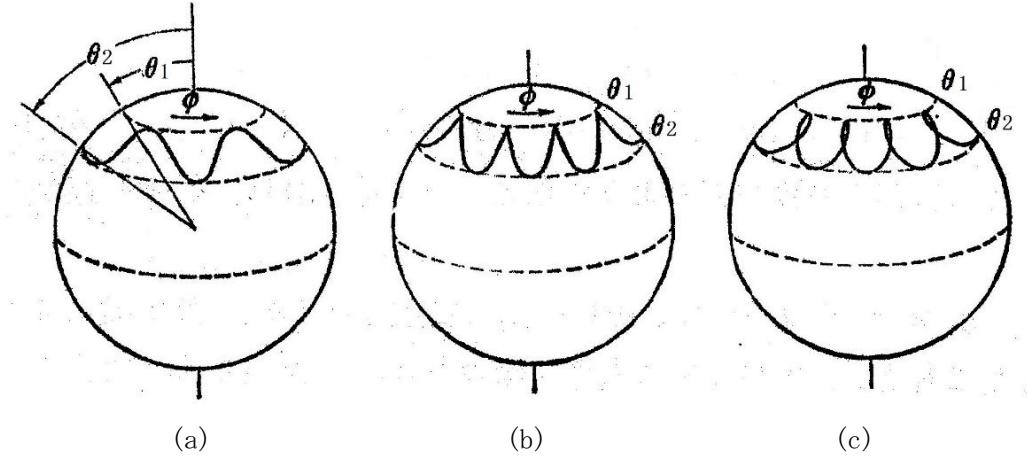


図 2.1 歳差と章動によって形成されるコマの先端の運動軌跡

(a)  $L_z > L_3 \cos \theta_1$  (b)  $L_z = L_3 \cos \theta_1$  (c)  $L_3 \cos \theta_1 > L_z > L_3 \cos \theta_2$

$L_z$  : 鉛直方向の角運動量  $L_3$  : コマの回転軸（慣性主軸）の角運動量

$\theta_1 \sim \theta_2$  : 章動の変動幅(角度)  $\phi$  : 歳差運動の方向

コマが定常歳差を起こす条件となる  $L_z$  は大小二つあり、 $L_3 \cos \theta_1$  の付加的角運動量に対応する付加係数  $z$  であらわせば  $z_{c1}$  と  $z_{c2}$  である。（第 3 章「章動の一般化」参照）

一般に見受けられるコマの現象としては、小さい方の角運動量  $z_{c1}$  がそれにあたる。

$z_{c1}$  は 
$$z_{c1} = \frac{\sin^2 \theta_c}{2 \cos \theta_c} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cos \theta_c}{s}} \right\} \quad (2.10) \text{式}$$
 で計算するか、図 2.4 を参照しても良い。

コマの定常歳差運動の発生する位置を  $\theta_c = 60^\circ$  として計算すると、 $z_{c1}$  は  $z_{c1} = 0.1376$  となる。この値を 1 として比率表示したものを  $z$  係数比率  $R_z$  と呼ぼう。

数式であらわせば、 $R_z = z / z_{c1}$  となる。

また、大きい方の角運動量に対応する  $z_{c2}$  は  $Rz = z_{c2}/z_{c1}$  となる。

$$z_{c2} \text{ は } z_{c2} = \frac{\sin^2 \theta_c}{2\cos \theta_c} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{4\cos \theta_c}{s}} \right\} \quad (2.13) \text{ 式} \text{ で計算するか、図 2.5 を参照しても良い。}$$

コマの定常歳差運動の発生する位置を  $\theta_c = 60^\circ$  として計算すると、 $z_{c2}$  は  $z_{c2} = 1.3624$  となる。この時の  $z$  係数比率  $Rz$  は、 $Rz = z_{c2}/z_{c1} = 1.3624/0.1376 = 9.90$  となる。

$Rz=1$  は定常歳差運動の状態、 $Rz=0$  は  $\dot{\phi} = 0$  でコマを手放した状態を表し、 $Rz$  が負の状態にある時も計算できる。

### 3 計算結果 $\theta - \phi$ 特性 (共通 : $s=6$ 初期位置 $\theta_1 = 60^\circ$ )

様々な計算が得られるが、ここでは代表的なものとして図 2.1 で示された章動と歳差によって形成されるコマの先端の運動軌跡を取り上げる。

尚、出力例としては第 1 章「単振動近似」付録である「エクセル章動波形」を参照願いたい。

計算は角運動量  $Lz$  の指標である  $z$  係数比率  $Rz$  をパラメーターとした。

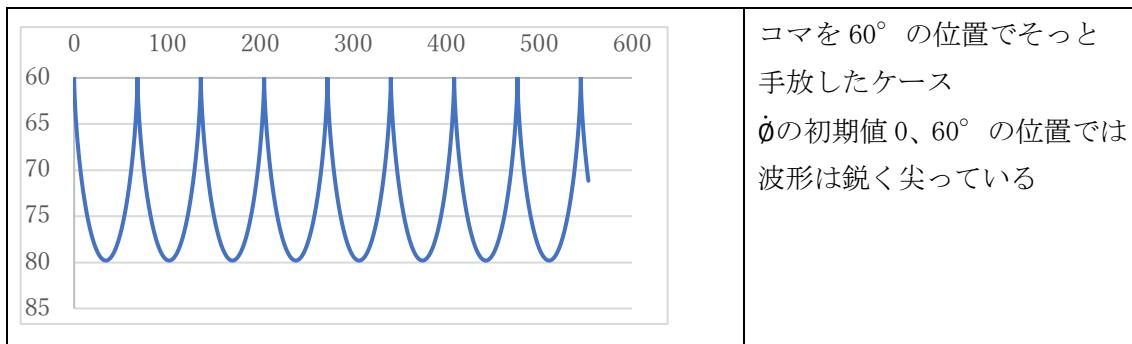
グラフは、 $\theta$  は縦軸、 $\phi$  は横軸、単位は度表示とした。

$\theta$  の縦軸はコマの落下をイメージして上方を  $0^\circ$  に設定した。

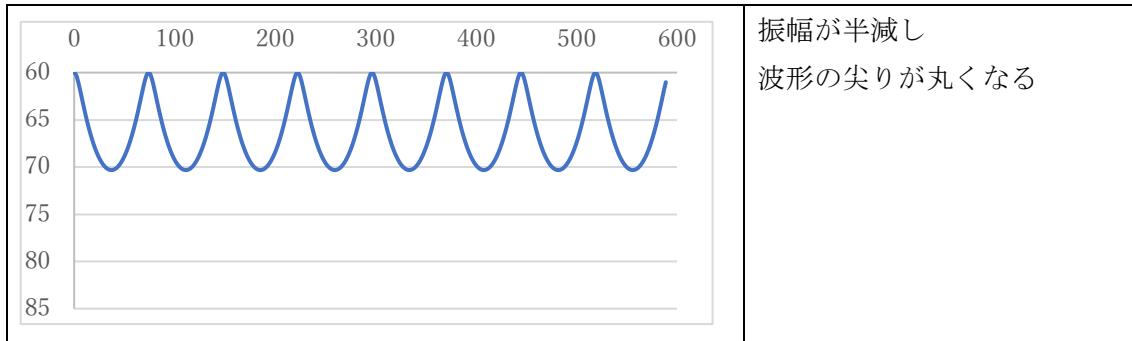
シミュレーションの計算時間は、 $Rz=3.63372$  を除いて 5 秒に統一した。

<ケース  $Rz=0 \sim 15$   $z$  係数比率  $Rz \geq 0$  の条件で  $Rz$  を増大方向に変化>

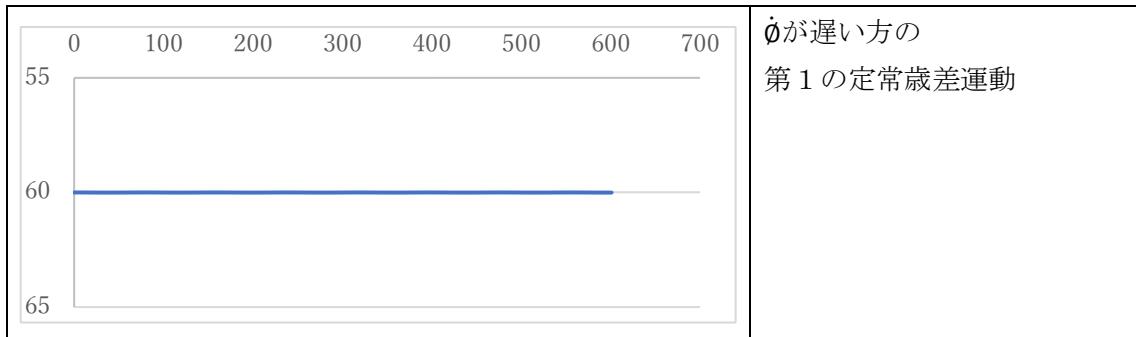
$Rz=0$



$Rz=0.5$

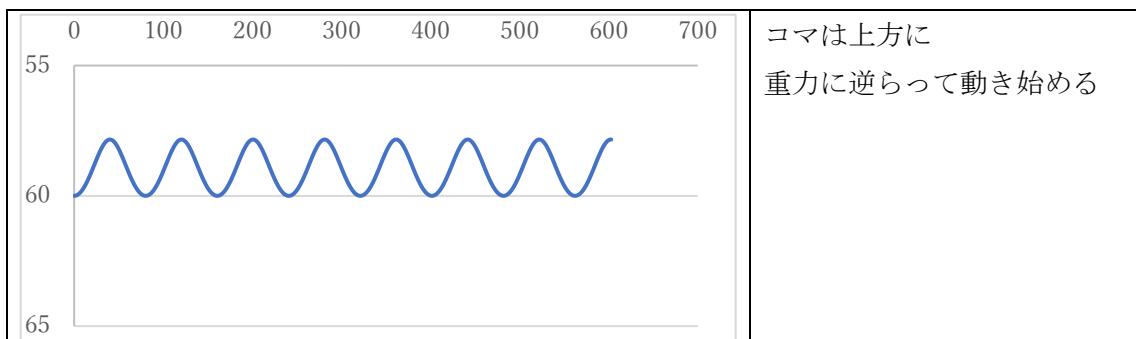


Rz=1



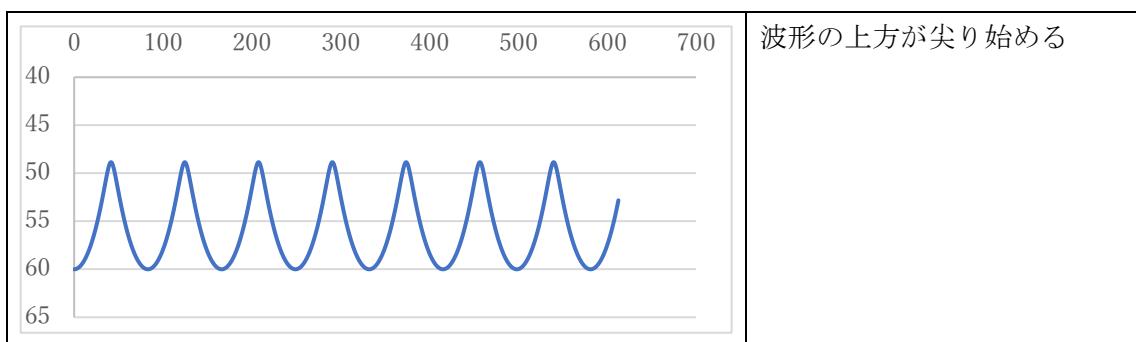
$\dot{\phi}$ が遅い方の  
第1の定常歳差運動

Rz=1. 1



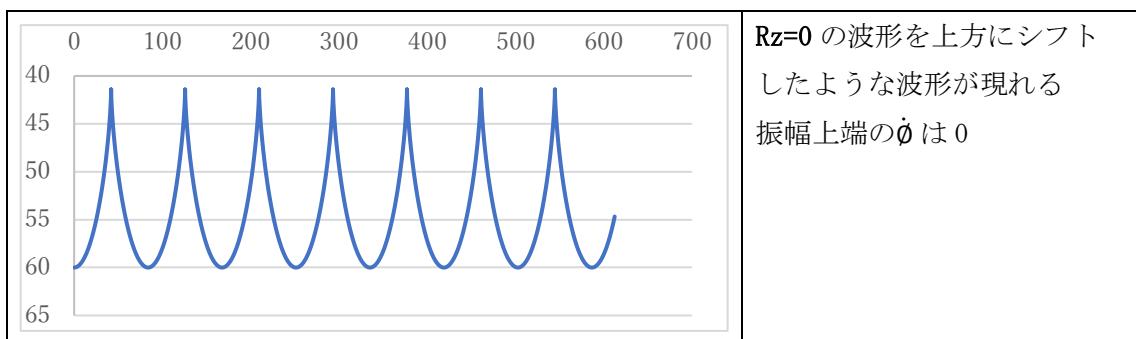
コマは上方に  
重力に逆らって動き始める

Rz=1. 5



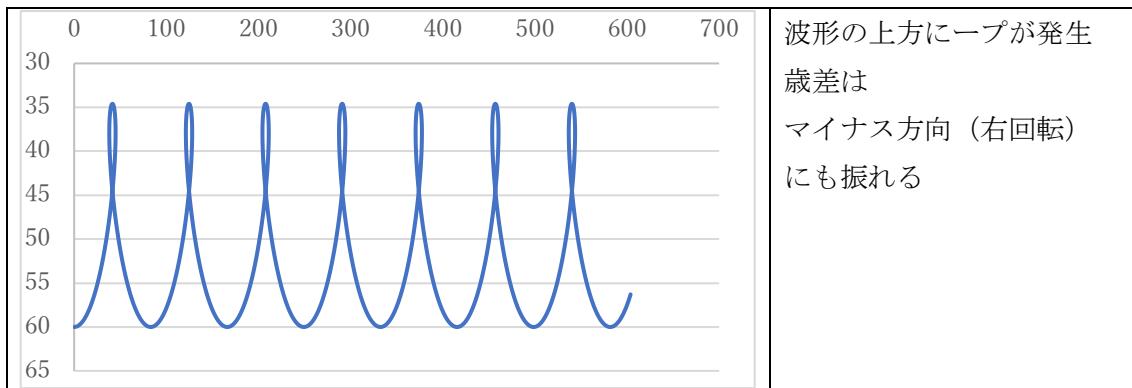
波形の上方が尖り始める

Rz=1. 817

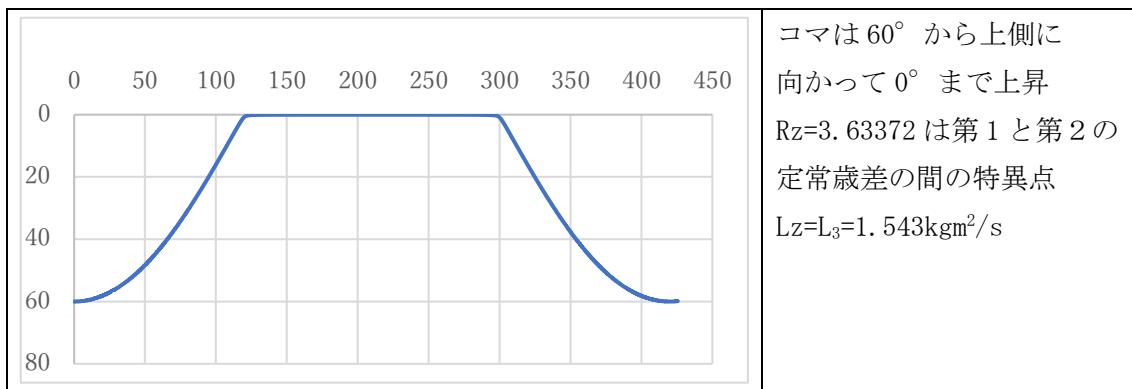


Rz=0 の波形を上方にシフト  
したような波形が現れる  
振幅上端の  $\dot{\phi}$  は 0

Rz=2. 1



Rz=3. 63372

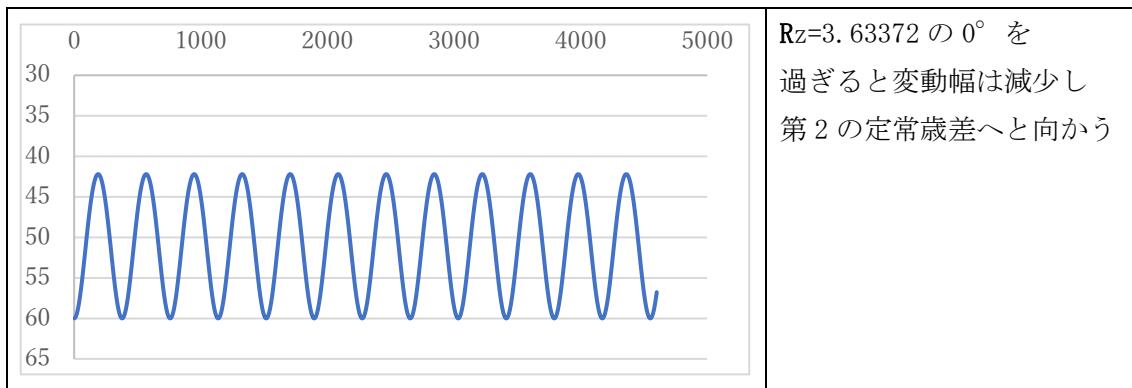


(注1) 上のグラフは  $0^\circ$  付近が直線状になっているが、これはグラフの表示法によるものである。これまでのグラフは地図にたとえるとメルカトル図法であった。  
メルカトル図法では、北極付近のロシアやカナダの地域の面積は実際よりも大幅に拡大される。これを北極方面から眺めると、実際に近い面積となる。  
上のグラフの  $0^\circ$  付近の実際の距離  $\phi$  は、縮小され尖った波形となる。

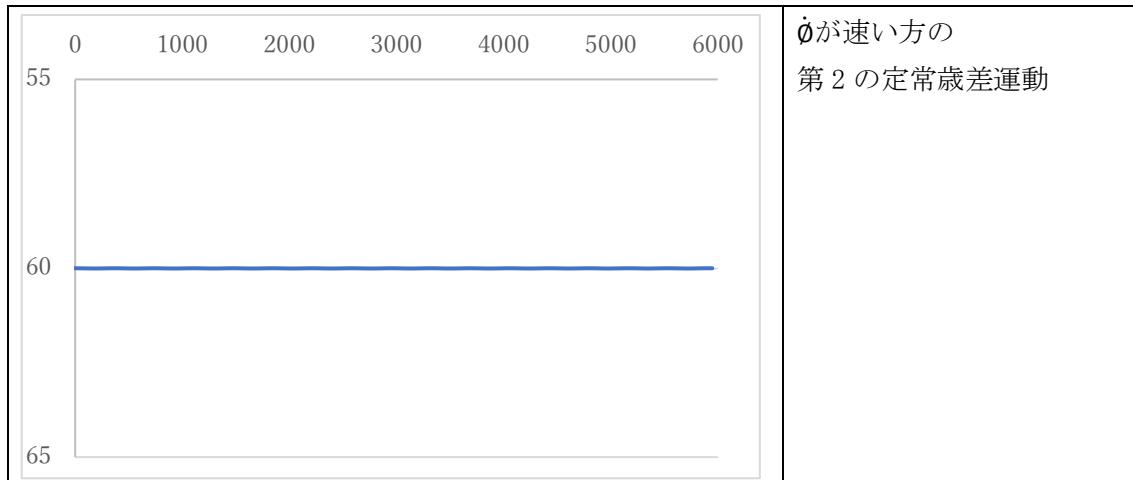
(注2) Rz=3. 63372 は特異点にあたるため計算条件を下記のように変更した。

刻み幅 0. 000001 秒 積分区間 0. 65 秒 出力幅 100

Rz=7. 0

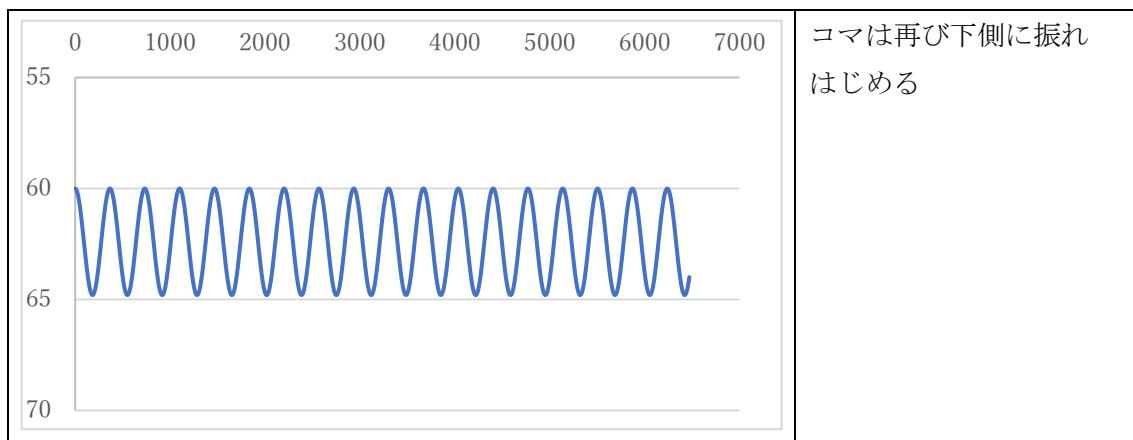


Rz=9.9



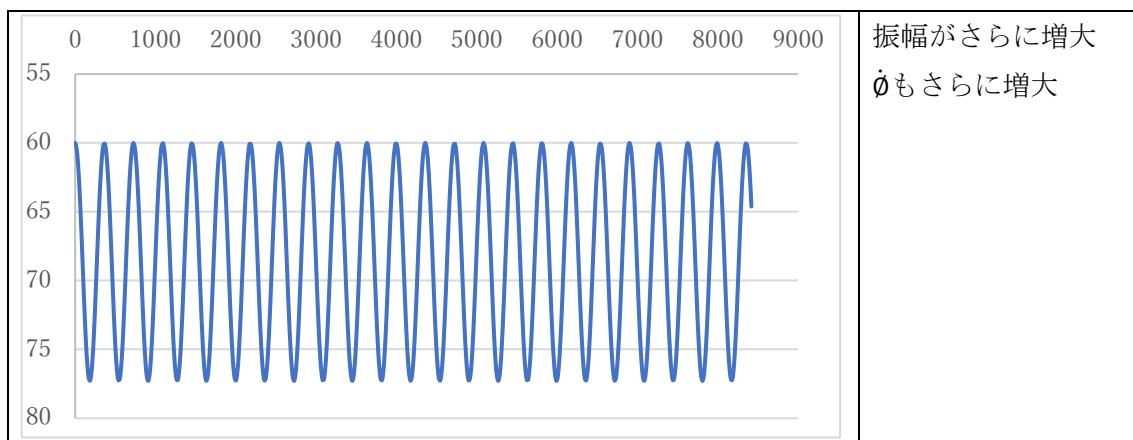
$\dot{\theta}$ が速い方の  
第2の定常歳差運動

Rz=11



コマは再び下側に振れ  
はじめる

Rz=15

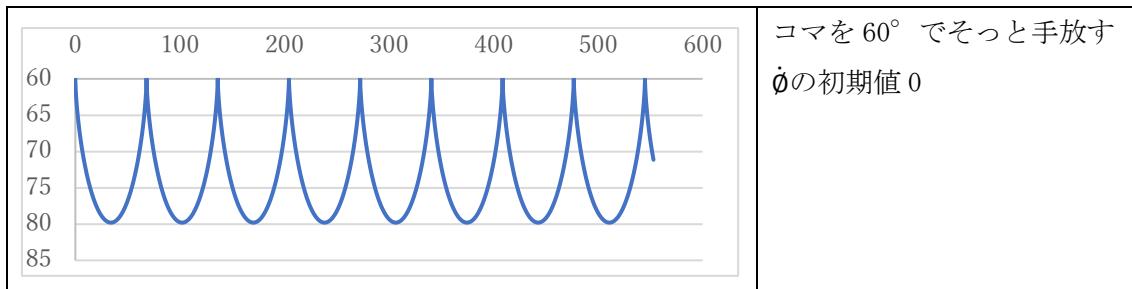


振幅がさらに増大  
 $\dot{\theta}$ もさらに増大

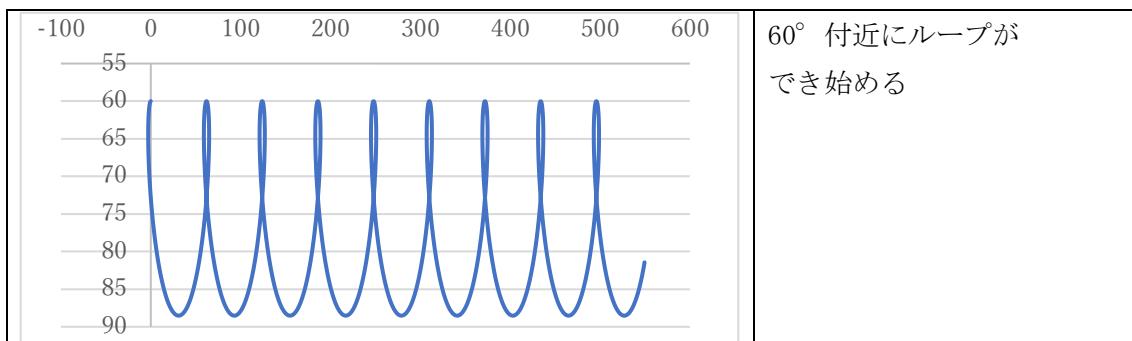
<ケース D-0～-5 z 係数比率  $Rz \leq 0$  の条件で  $Rz$  を減少方向に変化>

波形の変化は  $60^\circ$  付近のループが拡大してゆく傾向にあるが、全体としては単調な変化が続く。

$Rz=0$



$Rz=-0.5$

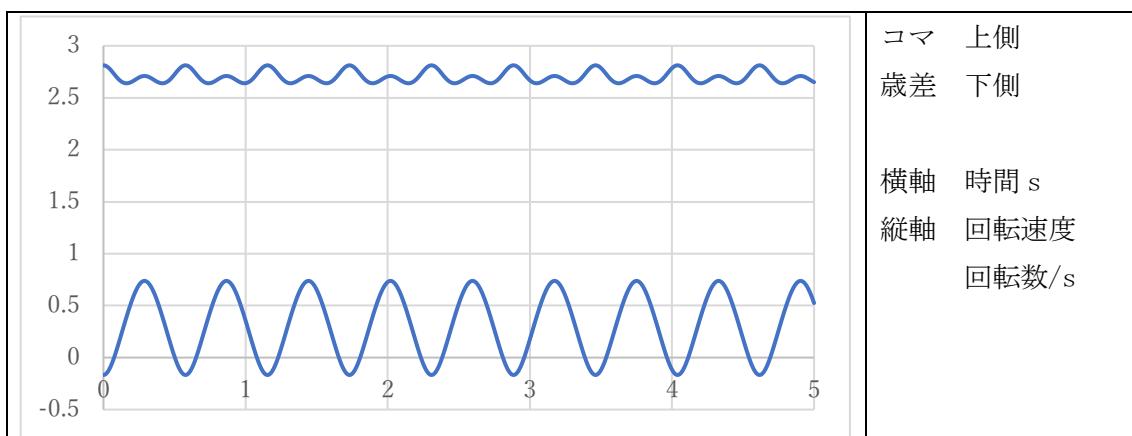


ここで上記のケース D-1  $Rz=-0.5$  のコマと歳差の回転速度を調べて見よう。

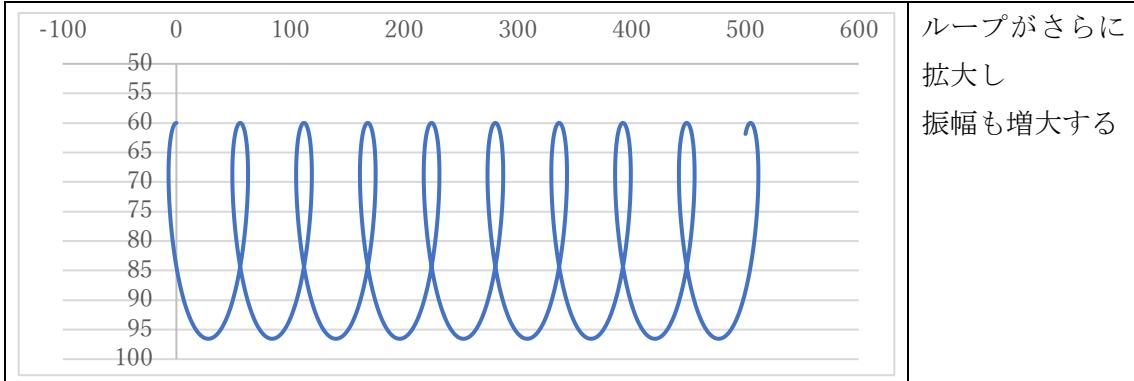
コマと歳差の波形は周期的に変化しているが、コマの波形は正弦波とは大きく異なっていることがわかる。

歳差が負にも振れていることにより、上図にループが形成されることがわかる。

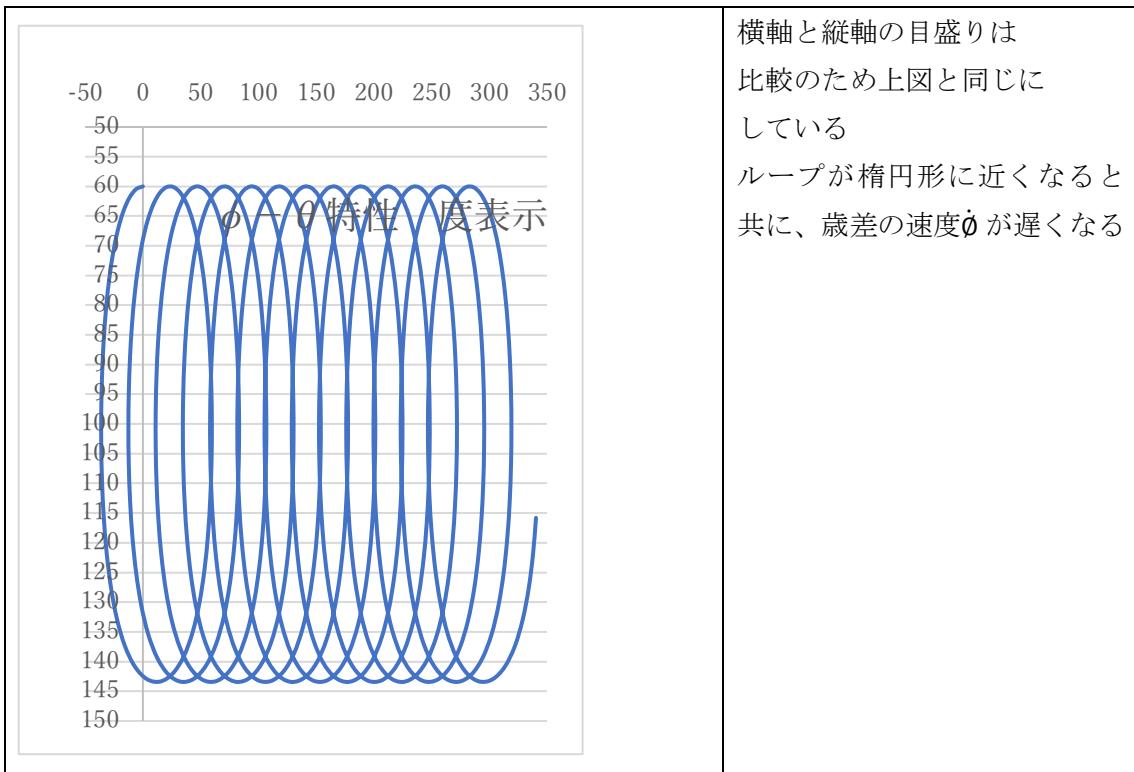
$Rz=-0.5$  コマと歳差の回転速度（継続時間 5 秒）



Rz=-1

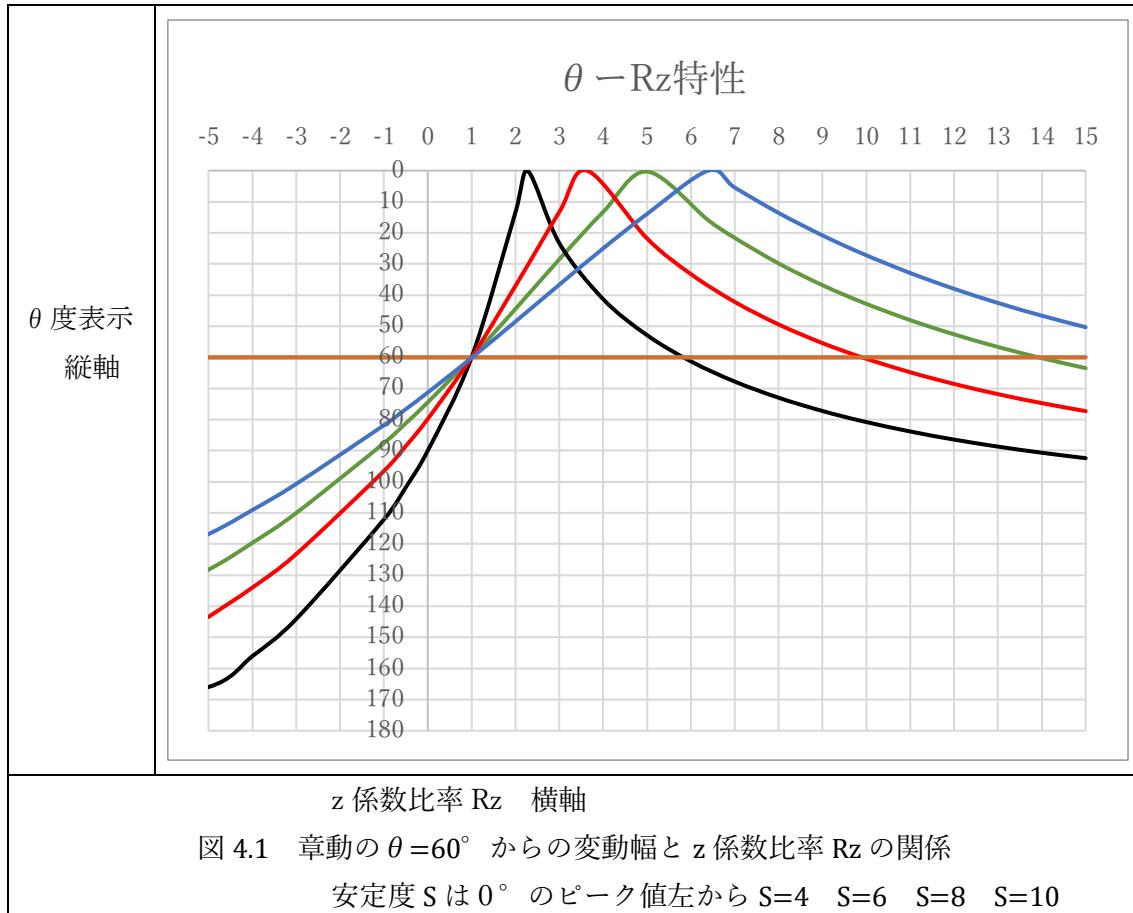


Rz=-5



#### 4 コマの共振現象

下の図 4.1 は 2 章「章動の一般化」で説明した図 2.6 において安定度 S を変化させたものである。 $\theta$  のピーク値は  $0^\circ$  で S が変わっても不変であることがわかる。



上図において赤線のグラフが、これまでに出力した S=6 のコマである。

$\theta - \phi$  波形の変化のターニングポイントとなる Rz は、これまでの出力波形から以下の通りである。（第 2 章「章動の一般化」参照）

- ①Rz=0           コマを手放した時の波形（表 1）
- ②Rz=1           第 1 の定常歳差の直線波形
- ③Rz=1.817       Rz=0 の相似波形（表 1）
- ④Rz=3.63372     コマの共振現象の発生
- ⑤Rz=9.9          第 2 の定常歳差の直線波形

ここではあまり知られてない現象として④Rz=3.63372 におけるコマの共振現象を取り上げる。Rzpeak=3.63372 は特異点で、その時の Lz は Lz=L3=1.543 である。

このことは、コマの傾斜角  $\theta$  の時間変化を調べればはっきりする。(下図参照)

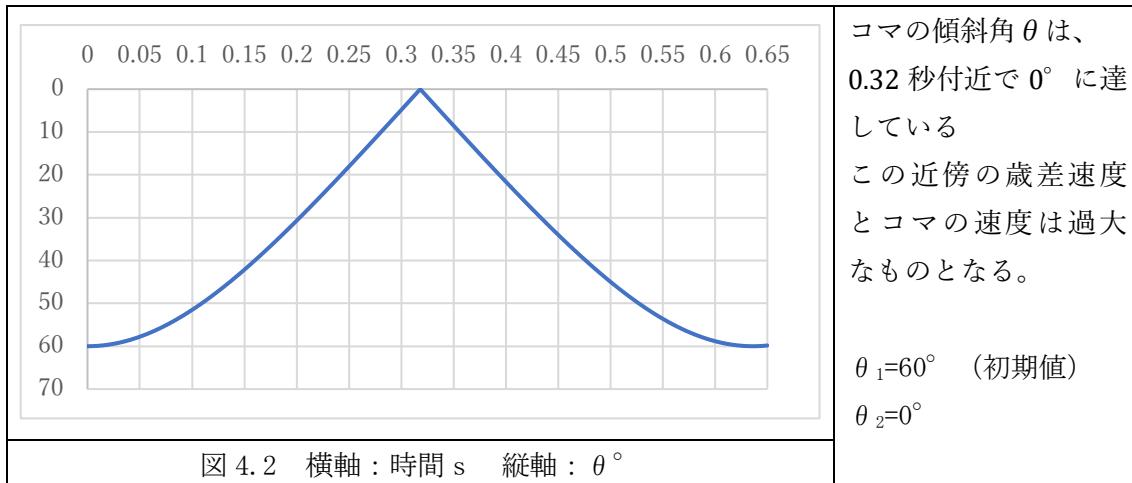


図 4.3 に  $z$  係数比率  $R_z$  をパラメーターとしたシミュレーション結果を示す。

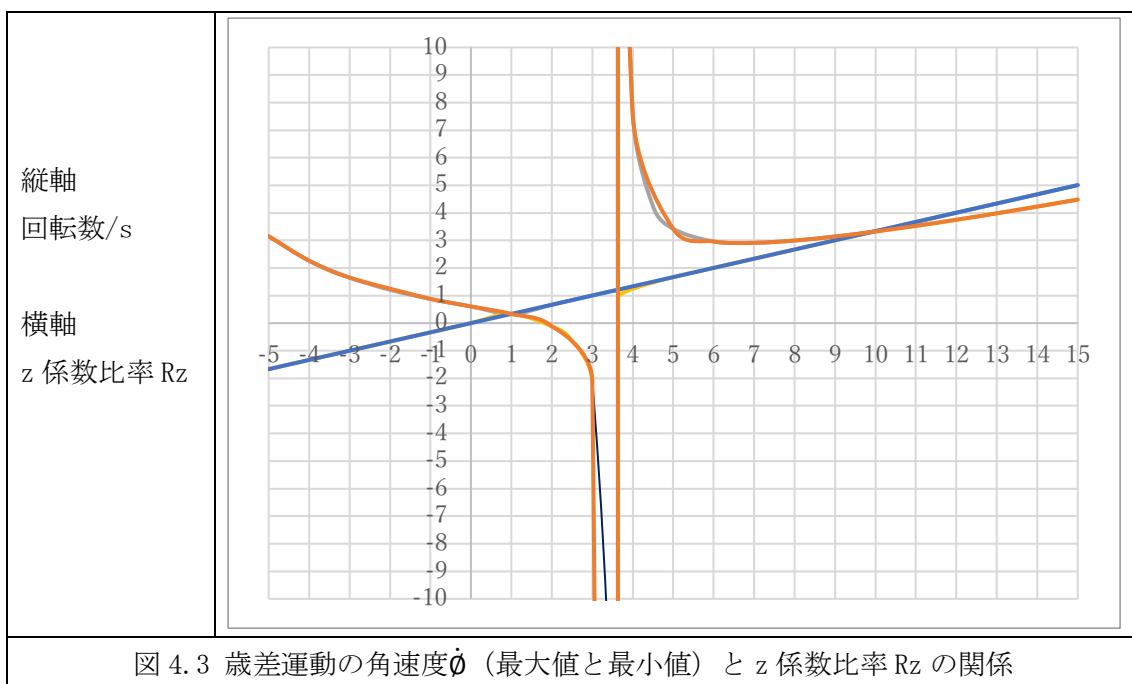
$\theta_1$  (初期値) と  $\theta_2$  は  $\dot{\theta}$  の最大値と最小値に対応するが、 $\dot{\theta}$  の初期値を考慮した一般化されたコマにおいては  $\theta_1$  が最小値かどうかは  $R_z$  の値に左右される。

尚、最小値と最大値はエクセルの MIN 関数と MAX 関数にて求めた。

角速度はイメージしやすく 1 秒あたりの回転数で表示した。

$\theta_1=60^\circ$  (初期値) における  $\dot{\theta}$  は直線的に変化するが、様々な  $\theta_2$  における  $\dot{\theta}$  は複雑な変化を示し  $Rz_{peak}=3.63372$  ( $L_z=L_3=1.543$ ) 近傍で発散していることがわかる。

これを見れば、非減衰強制振動の共振のパターンに類似していることがわかる。



尚、図 4.3 には下式により計算した理論値も合わせて表示している。

$\langle \theta_1 \text{における角速度} \dot{\phi} \rangle$	$\langle \theta_2 \text{における角速度} \dot{\phi} \rangle$
$\dot{\phi} = \left(\frac{L_3}{I}\right) \frac{z_{c1} Rz}{\sin^2 \theta_1}$ (2.24)式	$\dot{\phi} = \left(\frac{L_3}{I}\right) \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_2 + z_c Rz}{\sin^2 \theta_2}$ (2.23)式

グラフはほとんど重なっているが、Rz=3～Rzpeak の間に若干のずれがある。

太線が理論値、細線がシミュレーション結果である。

この原因は発散点付近でグラフが急激に立ち上がっており、プログラムで求められる微分係数が実際より低めに出ているからと思われる。

これを改善するには刻み幅を現在 0.000001 秒よりさらに短くする必要があるが、パソコンの計算処理能力の限界を超えるものとなる。

発散は秒速 2000 回転をこえるものであるがその継続時間は極めて小さいパルス状なので、距離を時間で割った平均速度に与える影響はあまりない。

図 4.4 に歳差運動の平均角速度  $\dot{\phi}$  と Rz の関係を示す。

Rzpeak を境にして、平均角速度  $\dot{\phi}$  の階段状の変化が認められる。

