

第5章 重力加速度をパラメーターとするコマの章動

はじめに

第2章「章動の一般化」では、初期条件として歳差運動の角速度 $\dot{\theta}_1$ が(a) $\dot{\theta}_1 > 0$ (b) $\dot{\theta}_1 = 0$ (c) $\dot{\theta}_1 < 0$ によって章動パターンが分かれることを説明した。

しかし、ここで一つの疑問が沸き起こる。

θ_1 を初期位置として、コマに $\dot{\theta}_1$ の角速度をどのようにして与えるのかという問題である。

単純に $\dot{\theta}_1$ の角速度で水平方向にむけて手放せば良いというのは誤りである。

答は、コマの先端を上方または下方に引っ張ることである。

これは「地球歳差」においてジャイロ効果の実験にて明らかにした通りである。

つまり、コマの初期状態のイメージをより具体的に示すならば、 θ_1 の位置において角速度 $\dot{\theta}_1$ で定常歳差運動をしているコマということになり、この時の $\dot{\theta}_1$ は下式で表される。

$$\dot{\theta}_1 = L_3 \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4mgrl \cos \theta_1 / L_3^2}}{2l \cos \theta_1} \quad (2.5) \text{式}$$

上式からわかるように、 $\dot{\theta}_1$ には重力加速度 g が関与していることがわかる。

本稿ではこの点に着目し、重力加速度をパラメーターとしてコマにおける重力場と章動波形の関係を検討する。

コマが定常歳差を起こす条件となる Lz は大小二つあり、 $L_3 \cos \theta_1$ の付加的角運動量に対応する付加係数 z であらわせば z_{c1} と z_{c2} である。(第3章「章動の一般化」参照)

一般に見受けられるコマの現象としては、小さい方の角運動量 z_{c1} がそれにあたる。

$$z_{c1} \text{ は } z_{c1} = \frac{\sin^2 \theta_c}{2 \cos \theta_c} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cos \theta_c}{s}} \right\} \quad (2.10) \text{式} \text{ で計算するか、図 2.4 を参照しても良い。}$$

コマの定常歳差運動の発生する位置を $\theta_c = 60^\circ$ として計算すると、 z_{c1} は $z_{c1} = 0.1376$ となる。この値を1として比率表示したものが z 係数比率 Rz である。

これらの諸関係を数式であらわせば、下記のようなになる。

$$\begin{aligned} Lz &= L_3 (\cos \theta_1 + z) = L_3 (\cos \theta_1 + z_{c1} Rz) \\ z &= z_{c1} Rz \quad L_a = L_3 z = L_3 z_{c1} Rz \end{aligned} \quad (2.16) \text{式}$$

尚、本稿は『理科教材で学ぶコマの運動』の一部で、説明で引用する考え方や諸式はすべて下記のサイトにまとめて掲載している。

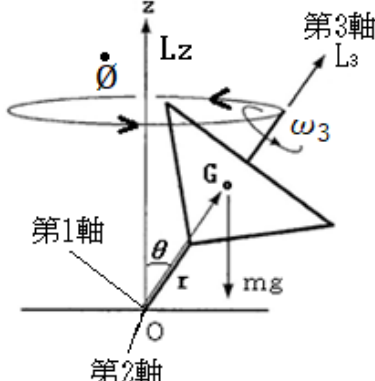
コマのワンダーランド 理科教材で学ぶコマの運動<歳差・章動・極運動>

<https://yamauo1945.sakura.ne.jp/astronomy.html>

1 検討の対象となるコマ

最初に検討対象となるコマを以下のように取り決める。

表 4.1 <検討対象となるコマの状態>

	L_z : 鉛直軸の角運動量 第3軸: コマの慣性主軸 コマの軸と同じ 第1軸、第2軸: 第3軸に直交する 慣性主軸 L_3 : コマの軸の角運動量 ω_3 : 第3軸の角速度	$\dot{\phi}$: 歳差運動の角速度 θ : コマの軸の傾斜角 g : 重力加速度 m : コマの質量 G : コマの重心 r : 位置ベクトル O : コマの支点 (原点)
---	--	---

地球上（重力加速度 $1g$ ）で安定度 $S=L_3^2/mgrI=6$ （安定度 S については第1章参照）のコマが軸の傾斜角 $\theta_1=60^\circ$ で定常歳差運動している状態

z 係数比率 $R_z=1$ at $1g$ $z_{c1}=0.1376$

質量 $m=1\text{ kg}$ 重力加速度 $g=9.8\text{m/s}^2$ $r=0.3\text{m}$

コマの回転軸に直交する軸周りの慣性モーメント $I=0.135\text{kgm}^2$

回転軸周りの慣性モーメント $I_3=0.09\text{kgm}^2$ 第3軸の角運動量 $L_3=1.543\text{kgm}^2/\text{s}$

2 重力加速度を変化させた時の章動波形

ここでは地球の重力加速度 g を基準として、重力加速度 g_z を $1.5g$ から $-1.5g$ まで変化した時の章動波形を求める。

g は地球の重力加速度 $g=9.8\text{m/s}^2$ で、重力加速度 $1.5g$ は 14.7m/s^2 を意味する。

また、重力加速度 $-1.5g$ は、逆方向（上向き）の加速度を意味する。

これは「地球歳差」の実験（図 0.8 参照）においてゴム糸の張力を引っ張ったり緩めたりすることに相当する。

次の3計算結果の章動波形は、第3章「コマのVBA」のシミュレーションによるものである。尚、グラフの縦軸 θ° の目盛りはコマの動きをイメージしやすいように下向きとってある。

重力加速度の上限は、「章動近似」で示された安定度 $S \geq 4$ の条件から求められる。

安定度は $S=L_3^2/mgrI$ であるから、任意の安定度の重力加速度の限界は $g_z=(S/4)g$ (5.1)式となる。従って、本例の $S=6$ のコマにおいては g_z の許容値は $\pm 1.5g$ となる。

3 計算結果 $\theta-\phi$ 特性 (共通: $S=6$ 初期位置 $\theta_1=60^\circ$)

様々な計算が得られるが、ここでは代表的なものとして図 2.1 で示された歳差と章動によって形成されるコマの先端の運動軌跡を取り上げる。

尚、出力例としては第 1 章「コマの章動のメカニズムと単振動近似」付録である「エクセル章動波形」を参照願いたい。

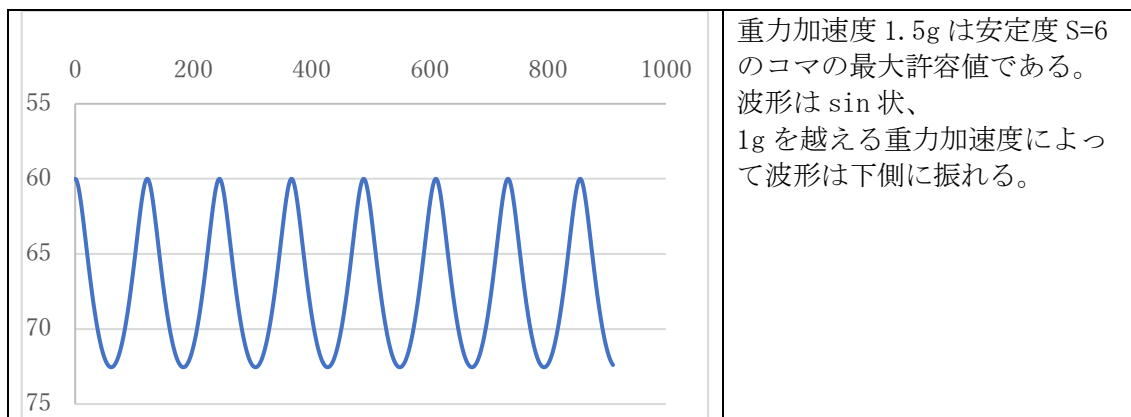
ここでは、重力加速度 g_z をパラメーターとしたシミュレーションを行う。

第 2 章「章動の一般化」で述べたように g_z は重力モーメントを形成するから、計算上は $g_z < 0$ の場合も成立する。これは「地球歳差」の実験で安定点を上方に設置することに対応する。表 4.1 でいえば mg を $-mg$ にすることになる。

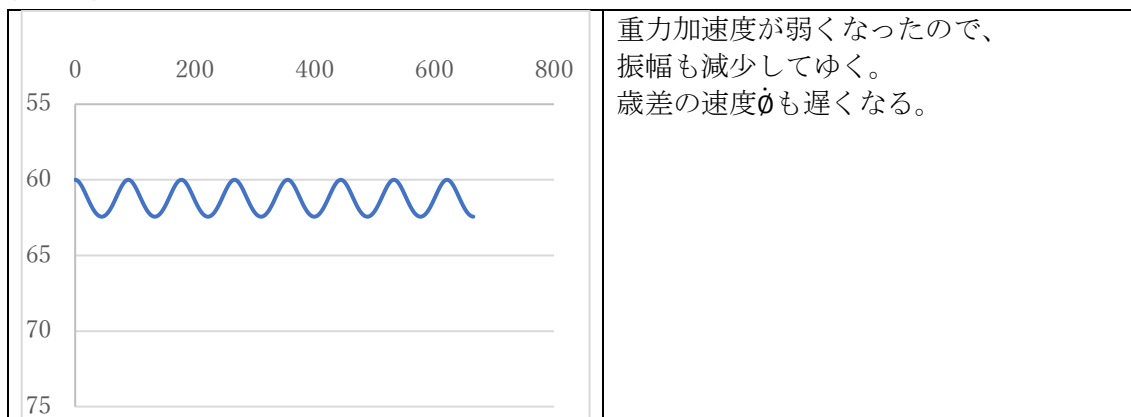
グラフは、 ϕ は横軸、 θ は縦軸、単位は度表示とした。シミュレーションの計算時間は 5 秒に統一した。

<重力加速度 g_z を $1.5g$ から $-1.5g$ まで減少方向に変化>

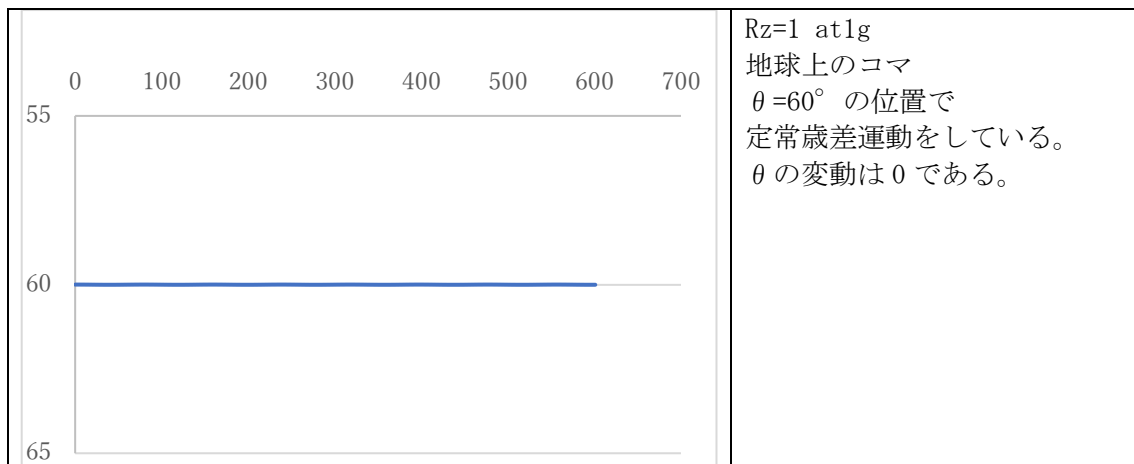
$g_z=1.5g$



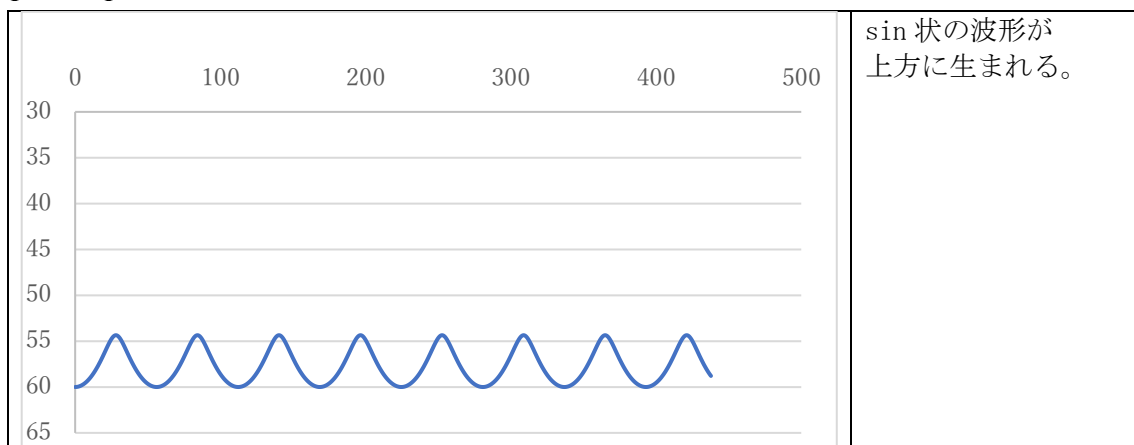
$g_z=1.1g$



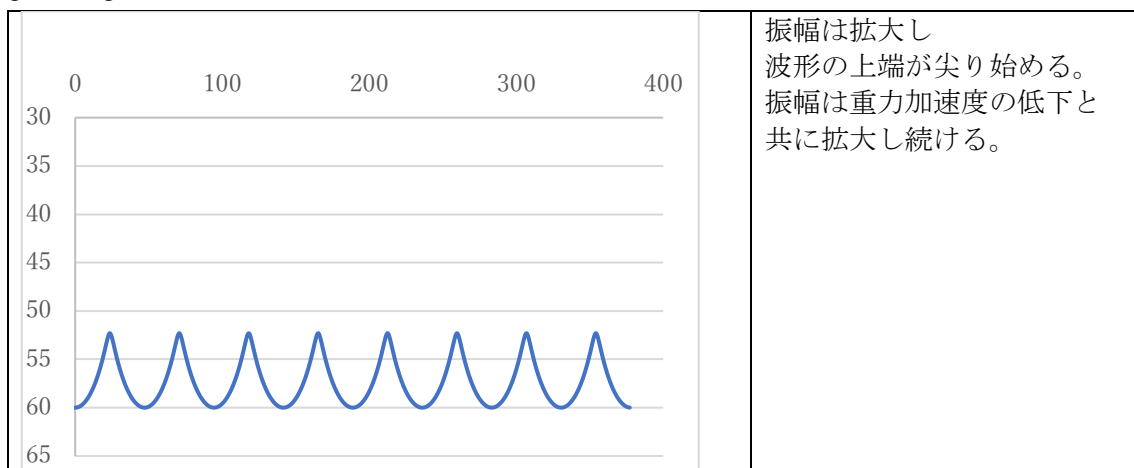
$g_z=1g$



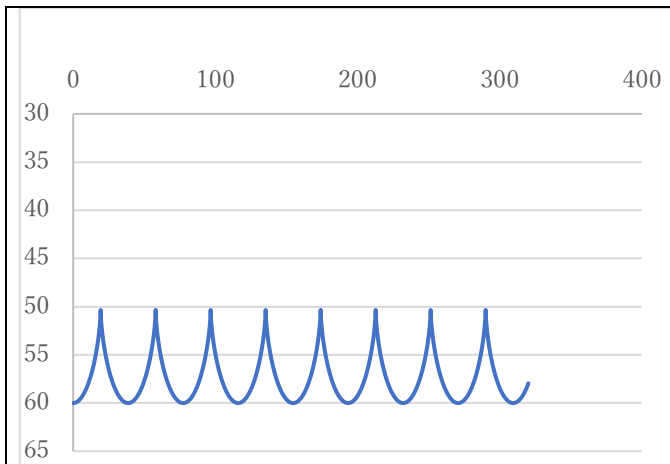
$g_z=0.75g$



$g_z=0.65g$

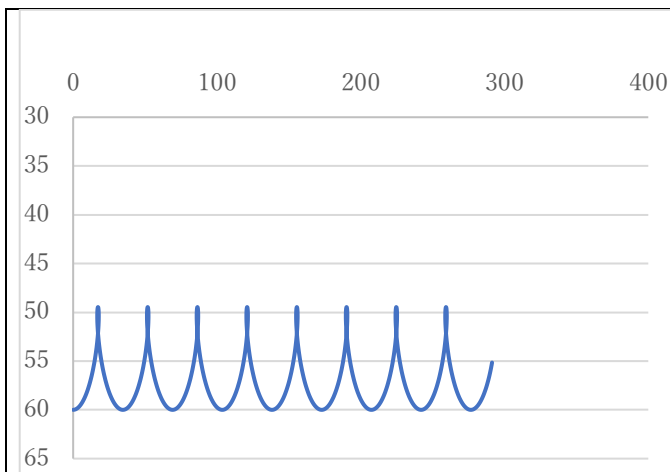


$g_z=0.55g$



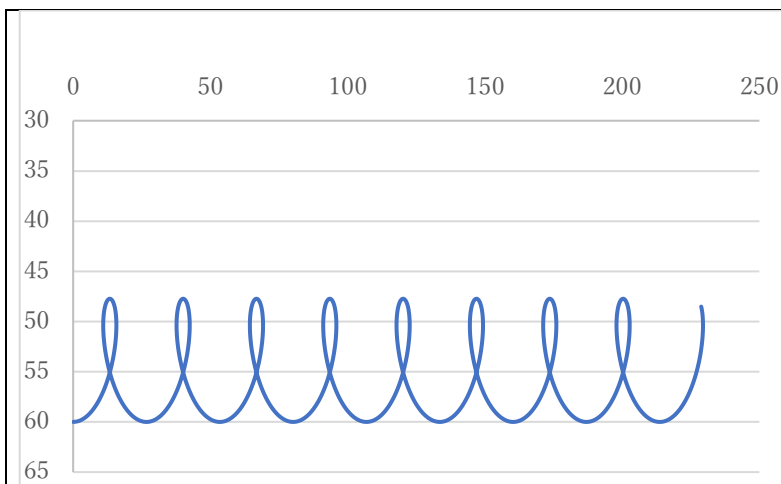
波形は、地球上において
コマを $\theta = 50^\circ$ で
そっと手放した時の波形に似
る。
つまり $\theta = 50^\circ$ では $\dot{\theta} = 0$ となる。
 $g_z = 0.55g$ の計算方法は後述の
検討 1 を参照。

$g_z=0.5g$



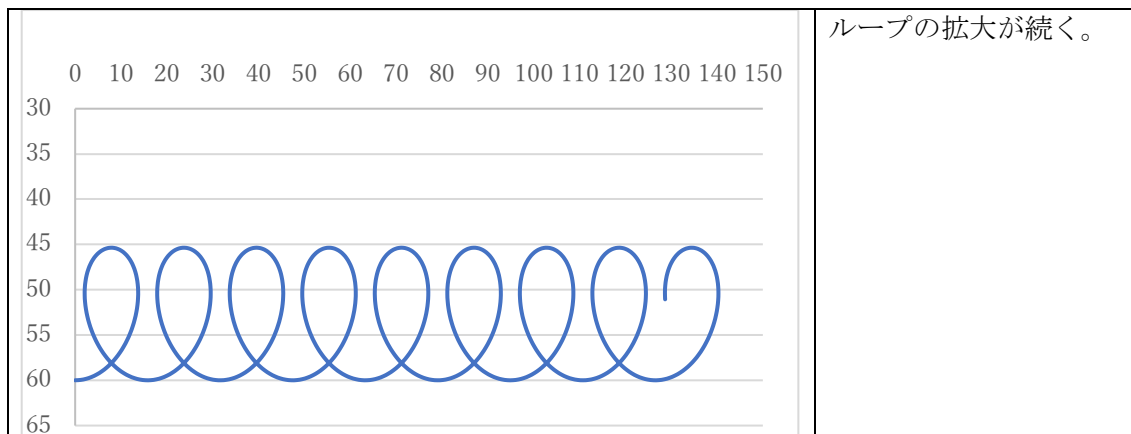
50° 付近にループができ始め
る。

$g_z=0.4g$

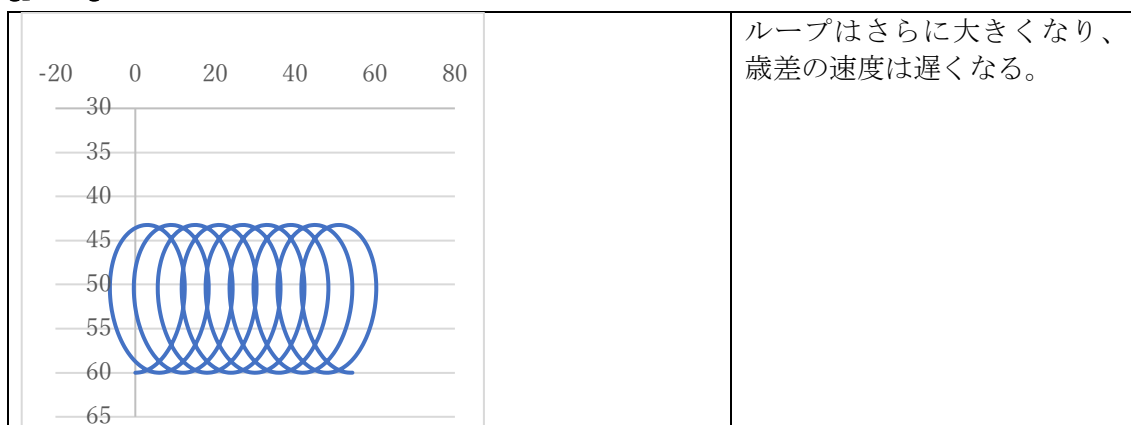


ループが拡大し始め
る。

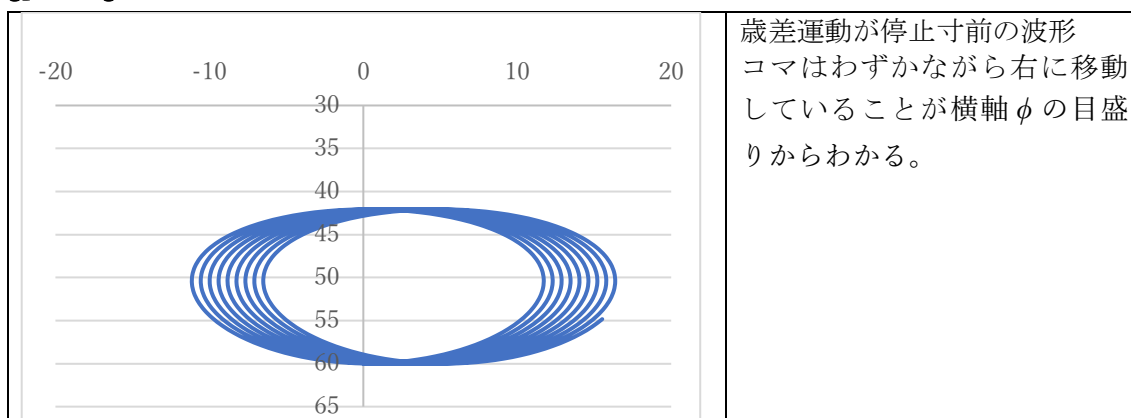
$g_z=0.25g$



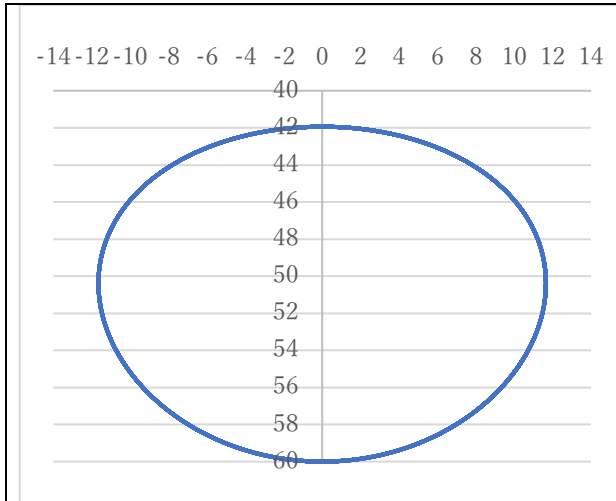
$g_z=0.1g$



$g_z=0.01g$



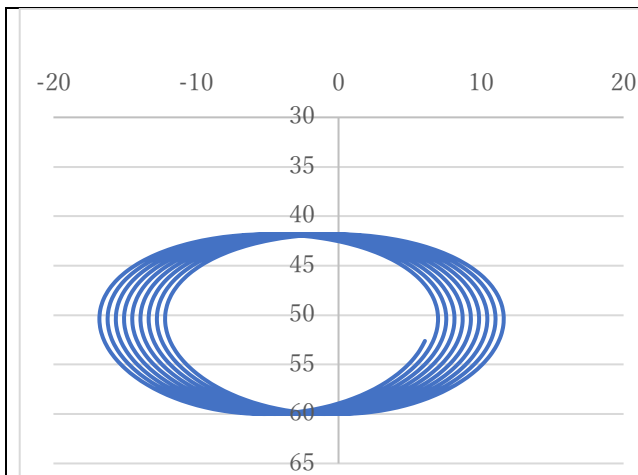
$g_z=0g$



横軸 ϕ の目盛りは左右対称で歳差運動は停止。

ϕ と θ は角度を単位として、正距方位図で描くと円形となる。詳細は後述の検討2を参照。

$g_z=-0.01g$

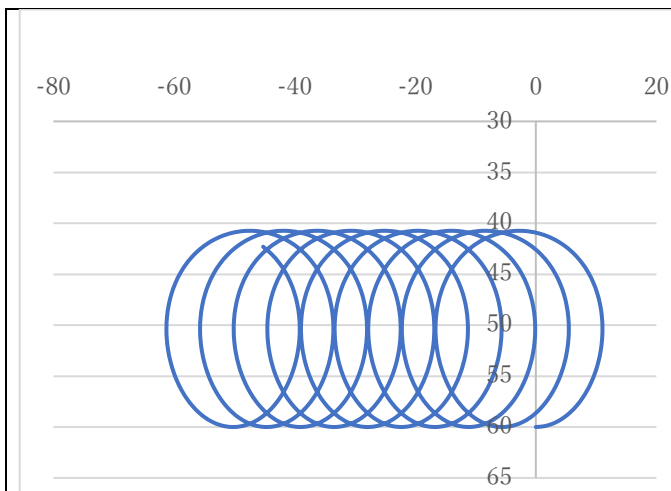


重力加速度が負になるということは、今まで下向きにかかっていた加速度が上向きにかかり始めることである。

歳差運動は左に移動し始める。

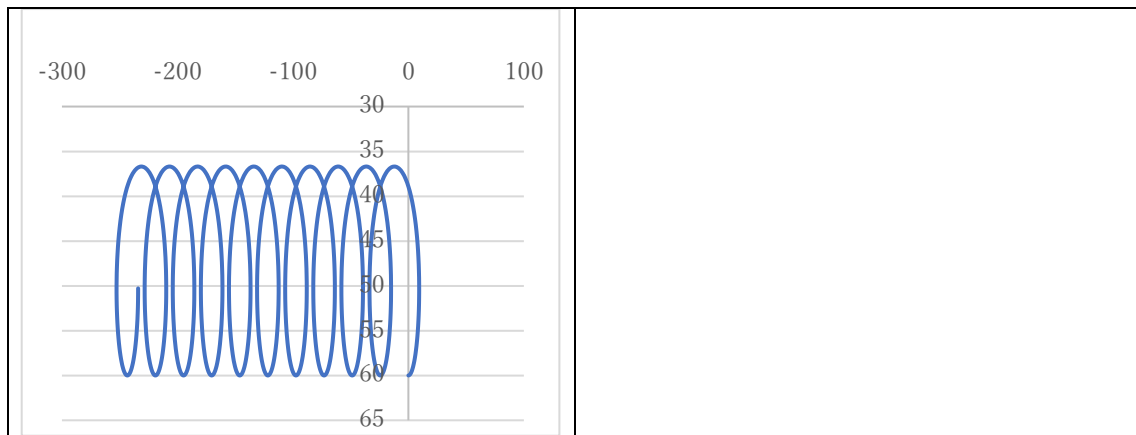
「地球歳差」の実験参照

$g_z=-0.1g$

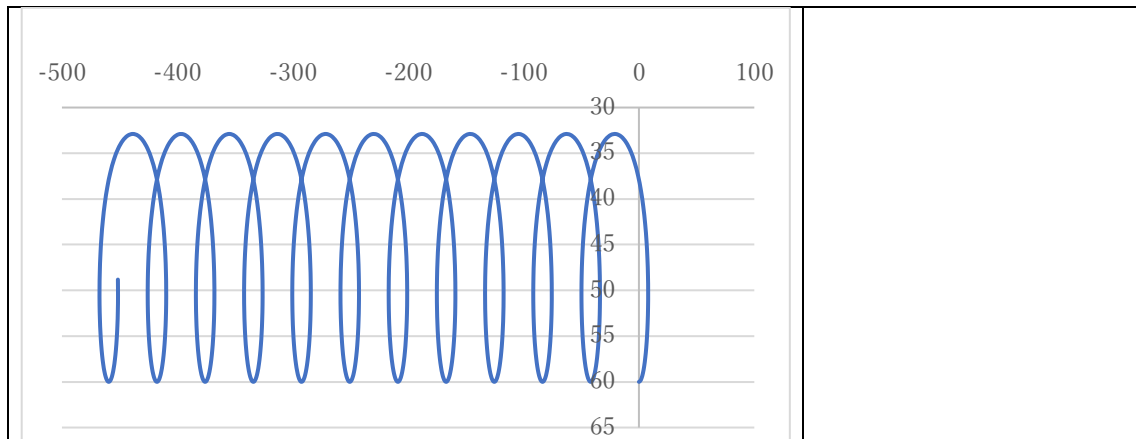


振幅が大きくなると共に、歳差運動が速くなる。

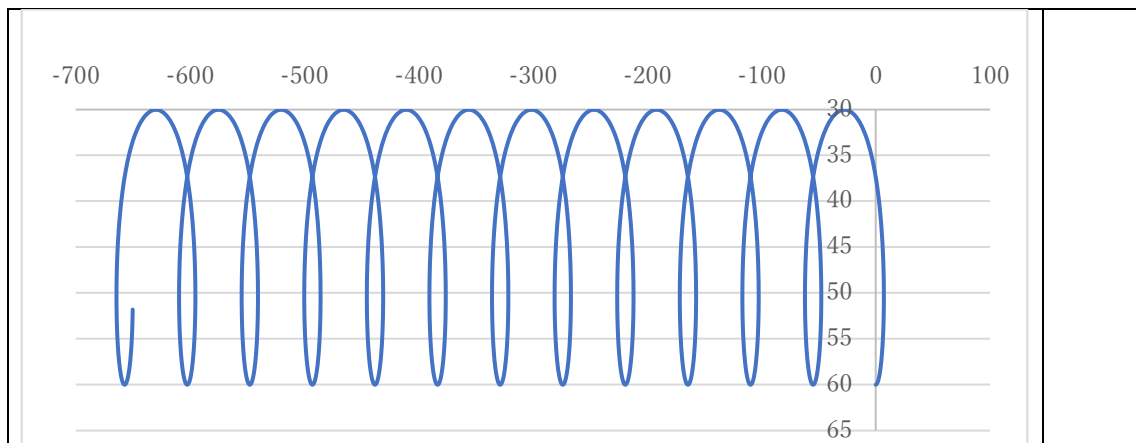
$g_z = -0.5g$



$g_z = -1g$



$g_z = -1.5g$



検討 1 変動幅の上端において $\dot{\theta}=0$ となる章動波形を与える時の重力加速度 g_z を求める。
 まず $\cos \theta_2$ を求めよう。

θ_2 においては $\dot{\theta}$ は 0 であるから下式が成立する。

$$L_z = L_3(\cos \theta_1+z_{c1}R_z)=L_3\cos \theta_2 \quad (5.1) \text{式}$$

これから $\cos \theta_2 = \cos \theta_1+z_{c1}R_z$ (5.2)式の関係がわかる。

上式に $z_{c1}=0.1376$ $R_z=1$ を代入して θ_2 を求めると $\theta_2=50.4^\circ$ となる。

グラフを見れば上記の計算結果と一致していることがわかる。

次に $L_z = L_3\cos \theta_2$ の関係を第 2 章の(2.15)式の { } 内の部分に代入する。

式全体を 0 とおくと g_z を求める下式が導かれる。

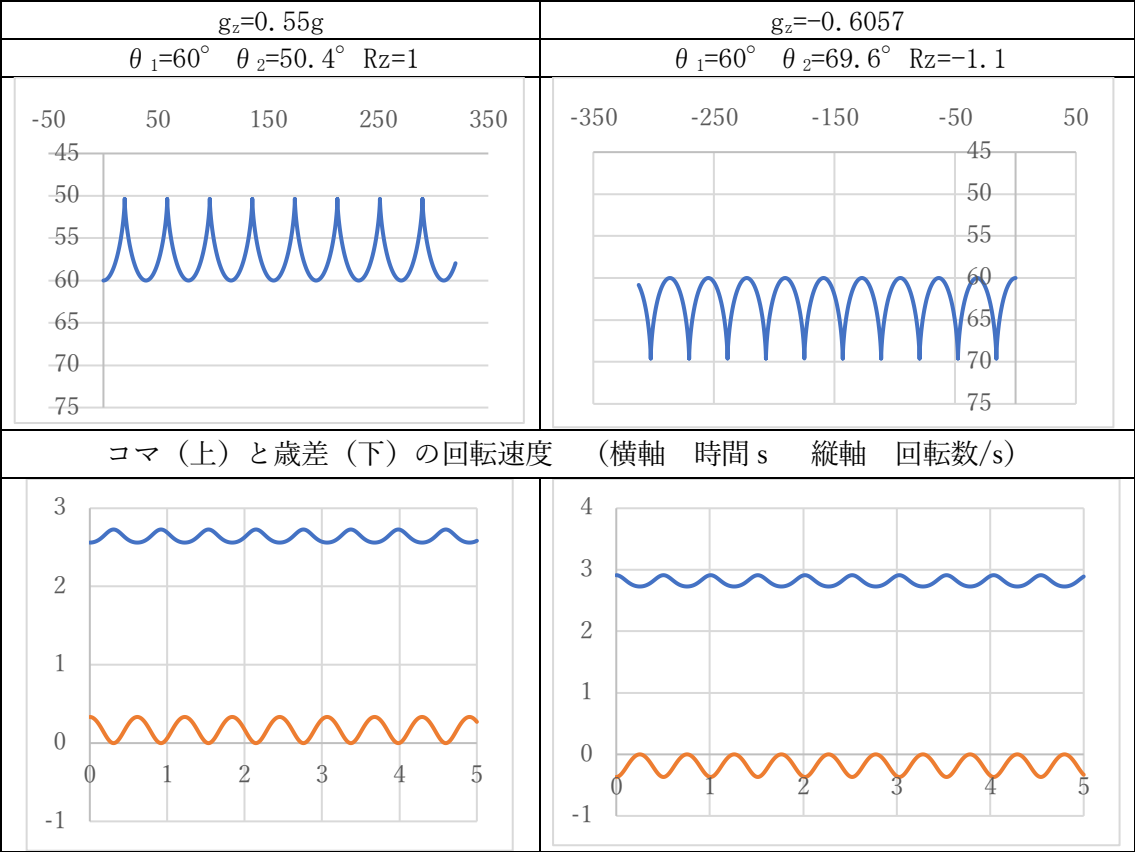
$$g_z = \frac{Sg}{2(\sin\theta_1\sin\theta_2)^2}(2\cos\theta_2(1+\cos\theta_1\cos\theta_2)-(cos\theta_1+\cos\theta_2)(1+\cos^2\theta_2)) \quad (5.3) \text{式}$$

ここで $\theta_1=60^\circ$ $\theta_2=50.4^\circ$ $S=6$ を代入すると $g_z=0.55g$ が算出できる。

上記の考え方を応用すれば、 $\theta_1=60^\circ$ $\theta_2=50.4^\circ$ の章動波形に上下対称な出力波形を求めることができる。

即ち、 $\theta_1=60^\circ$ $\theta_2=69.6^\circ$ を(5.2)式と(5.3)式に代入すると $R_z=-1.1$ 、 $g_z=-0.6057$ を得る。
 $g_z=-0.6057$ における歳差は負（右回転）であることがわかる。

表 5.1 上下対称の出力波形（変動幅 $60^\circ \pm 9.6^\circ$ $S=6$ ）



検討2 無重力場におけるコマの運動

表 5.2 は無重力場におけるコマの先端の軌跡を、これまでの $\theta - \phi$ 特性と正距方位図で比較したものである。

従来のグラフは横方向に長く、真円からはズレていることがわかる。

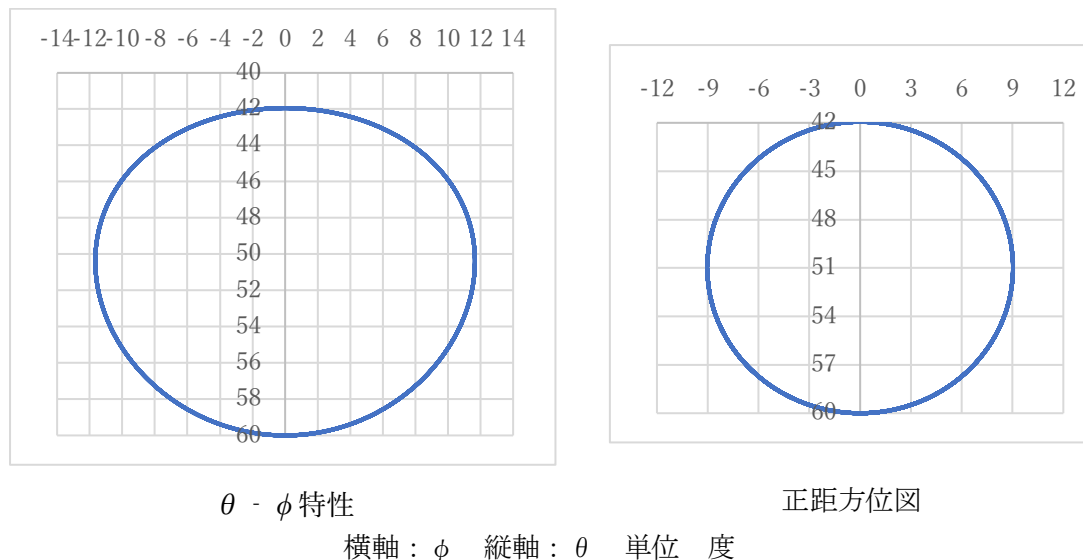
このズレは極値 (0° または 180°) に近づくほど横に長くなる傾向にある。

しかし、正距方位図で眺めるといずれも真円となる。

表 5.2 の正距方位図は変動幅の中央値 $\phi=0^\circ$ $\theta=51^\circ$ を中心とした半径 9° の円を示している。

これはコマの運動における力のモーメントが作用しないときのオイラーの運動方程式から導かれる角運動量ベクトルを中心とする慣性主軸（対称軸）の円運動と同じものである。

表 5.2 無重力場におけるコマの運動



尚、 $0g$ における変動幅は下式で求められる。（詳細は第 6 章参照）

$$\tan\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) = \frac{L_a}{L_3 \sin \theta_1} \quad (6.48) \text{式}$$

ここで L_a は $L_a = L_3 z_{c1} R_z$ (2.16) 式で表され、表 4.1 から $L_a = 1.534 \times 0.1376 \times 1 = 0.212$ となり、(2.46) 式に $\theta_1 = 60^\circ$ $L_3 = 1.543$ $L_a = 0.212$ を代入すると $\theta_2 = 41.9^\circ$ が計算できる。表 5.1 の示すように変動幅は 18° となり、正距方位図の半径は 9° となる。

尚、コマをそっと手放す時の初期条件は $L_a = 0$ であるから、(6.46) 式により $\theta_2 = \theta_1$ となり、円は点となる。つまり、コマは置かれた位置から動くことなく眠りゴマの状態となることがわかる。